X (actos)	Estimación a simple vista de la puntuación Z (DE)	Puntuación Z calculada (DE)
9		
12		
19		
26		
3		
14		

Aplicaciones opcionales en computadora para el capítulo 5

Si en su clase usa computadoras, abra los ejercicios del capítulo 5 en el disco compacto *Computer Applications for The Statistical Imagination*. Los ejercicios implican usar 1) *SPSS para Windows* para calcular el rango, la desviación estándar y las puntuaciones Z y 2) emplear los estadísticos de tendencia central y de dispersión para discernir las formas de las distribuciones de la puntuación.

CAPÍTULO 6

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

Introducción: el impulso humano para predecir el futuro 158

¿Qué es una probabilidad? 160

Reglas básicas de la teoría de la probabilidad 161

Regla de probabilidad 1: las probabilidades siempre oscilan entre 0 y 1 161
Regla de probabilidad 2: la regla de adición para eventos alternativos 162
Regla de probabilidad 3: ajuste para las ocurrencias conjuntas 162
Regla de probabilidad 4: la regla multiplicativa para eventos compuestos 163
Regla de probabilidad 5: explicación del reemplazamiento con eventos compuestos 165

Uso de la curva normal como una distribución de probabilidad 166

Pensamiento proporcional respecto de un grupo de casos y casos únicos 166
Partición de áreas bajo la curva normal 169
Ejemplos de problemas al usar la curva normal 171
Valores críticos y regiones críticas bajo la curva normal 181
Cálculo de percentiles para poblaciones normalmente distribuidas 182

La curva normal como una herramienta para el pensamiento proporcional 183

Probabilidades: donde se intersectan el pensamiento proporcional y el control del error 184
Insensatez y falacias estadísticas: la falacia del jugador: independencia de eventos de probabilidad 186

Introducción: el impulso humano para predecir el futuro

La capacidad mental humana se distingue de la de otras especies por su habilidad para pronosticar el futuro —concebir lo que "a la larga pasará"—. Predecir eventos futuros significa entenderlos, y el desarrollo de la cultura humana depende de la predicción. El campo de la estadística trata sobre cómo realizar predicciones con medidas muy precisas. Los estadísticos ganan estatus y autoridad gracias a la predicción y al entendimiento exitoso. Con sus aplicaciones en las ciencias, negocios, industria, informes meteorológicos, medicina, salud y servicios públicos, gobierno, los juegos de apuesta, entretenimiento y deportes, el trabajo estadístico es un ejemplo de la predicción del futuro.

Los deseos humanos de prever eventos no son nuevos. Desde los primeros tiempos de la organización social humana, los "videntes" (como los sacerdote-doctores llamados chamanes) adquirieron gran autoridad prediciendo ciclos climáticos y eventos importantes como la lluvia. Aplicar las matemáticas a la solución de problemas prácticos también tiene una larga historia. Las técnicas de medición y de cálculo son tan viejas como la cultura humana misma y se establecieron bien hace 4 000 años. Las pirámides del antiguo Egipto ejemplifican una precisa organización matemática del mundo físico. De hecho, muchos estudiosos argumentan que la magnitud del conocimiento egipcio se subestima bastante (Gillings 1972, Neugebaurer 1962, Struik 1948). Como Tompkins (1971: xiv-xv) anota:

> Quienquiera que haya construido la Gran Pirámide [...] conocía la circunferencia precisa del planeta y la duración del año con varios decimales —datos que no se redescubrieron sino hasta el siglo XVII—.

Las matemáticas, trigonometría y "ciencias exactas" modernas como la física tienen sus orígenes en antiguas culturas mediterráneas, en las cuales se veneró el estudio sistemático de la naturaleza. Destacar el desarrollo de la ciencia consiste en reconocer que la naturaleza física es altamente cíclica y, por tanto, predecible a medida de que sigue leyes científicas estrictas. Por ejemplo, un físico que está descansando en la tierra puede estar seguro de que cualquier objeto más pesado que el aire caerá a la tierra. La conducta humana, sin embargo, no es predecible. Por consiguiente, los científicos sociales y del comportamiento a menudo deben matizar sus conclusiones, aclarando que sus predicciones están basadas en grados de exactitud limitados *pero calculables*. Por ejemplo, un científico social que estudia la relación de, por decir, las calificaciones en la preparatoria con las calificaciones en la universidad quizá sólo sea capaz de afirmar una correlación entre ellas,

declarando que hay una *oportunidad* calculable de que un excelente estudiante en la preparatoria obtendrá excelentes calificaciones en sus estudios universitarios. Las leyes de la oportunidad son herramientas para determinar el grado de exactitud en predicciones de las ciencias sociales. Nos referimos al *análisis y entendimiento de las ocurrencias de oportunidad* como **teoría de la probabilidad**.

Teoría de la probabilidad
Análisis y entendimiento de las ocurrencias de oportunidad.

El descubrimiento de las leyes de la Teoría de la oportunidad empezó en tiempos antiguos, y quizá se estimuló tanto por actividades de ocio como las apuestas, como por actividades laborales (David 1962: 4-10). Entre los artefactos de la primera dinastía de Egipto (3500 a.C.)había juegos de tablero, piezas para jugar y *astralagi* animal (huesos de las articulaciones), los precursores de los dados. En Egipto, los dados cúbicos fueron de empleo común hacia el año 3000 a.C. Las apuestas fueron tan comunes en tiempos romanos que se prohibieron en ciertas fechas. En la literatura romana existen referencias a un libro de Claudio (10 a.C.- 54 d.C.) titulado *Cómo ganar en los dados*. Los jugadores astutos tenían la imaginación estadística. Ellos podían pensar proporcionalmente, reconociendo que algunas "tiradas de huesos" ocurrían en una mayor proporción de las veces que otras. Aconsejando exitosamente a los miembros de las clases gobernantes sobre cómo aumentar sus ganancias en las apuestas, estos primeros estadísticos alcanzaron un alto estatus. Logrados analistas de la bolsa de valores e investigadores de encuestas, así como pronosticadores en carreras de caballos, son el equivalente moderno de aquellos consejeros estadísticos altamente respetados.

Podemos conjeturar que el interés humano en predecir los resultados de eventos futuros no se limitó a los juegos de azar. Hasta donde los seres humanos se interesan, las fuerzas de la naturaleza (sobre todo el clima) involucran el azar; así la adaptación ambiental está labrada con el destino y la buena o mala suerte. La evolución cultural es estimulada por la necesidad de la sociedad de anticiparse a lo que ocurrirá después. Por ejemplo, por el periodo dinástico medio (hacia 2000 a.C.) los antiguos egipcios habían desarrollado sistemas complejos de irrigación y de canales para regular la inundación anual del río Nilo. Con datos manejados por una burocracia muy eficaz, supervisaron la profundidad del río con "nilómetros", colocados en puntos estratégicos a lo largo de la vasta longitud del Nilo de 4 145 millas. Al estudiar y anticipar los flujos, utilizaron ventajosamente los caudales para la irrigación de la cosecha (David 1962). La exactitud de sus predicciones generó una economía estable que reforzó el poder político de las dinastías gobernantes. Muchas culturas antiguas tenían una parte de empiristas: individuos que creían en los méritos de la observación y la medida. El empirismo y la popularidad de las apuestas, la religión y los adivinos atestiguan un interés humano innato en apostar en lo que ocurrirá y se prepara para ello. Todo, desde la predicción de la fortaleza de la tropa enemiga hasta decidirse si llevar un paraguas, invertir en acciones o proponer matrimonio, requieren medidas y estimaciones de la probabilidad de su éxito o fracaso. El análisis estadístico que utiliza la teoría de la probabilidad es la herramienta mediante la cual se realizan predicciones con un grado máximo de exactitud.

¿Qué es una probabilidad?

Una **probabilidad** (*p*) es *una especificación de qué tan frecuente es probable que ocurra un evento de interés particular entre un gran número de ensayos (situaciones en las que el evento puede suceder)*. Llamamos probabilidad de éxito a la probabilidad de ocurrencia de este evento de interés. De igual manera, la probabilidad de que *no* ocurra el evento se llama probabilidad de fracaso. Se usan corchetes para distinguir el evento de interés señalado; y una *p* minúscula, para indicar la "probabilidad" de un cálculo específico. Observe que este símbolo es el mismo usado en los capítulos anteriores para *proporción*. Esto se hace porque las probabilidades *son* proporciones, como discutiremos brevemente.

Una probabilidad (*p*)

Especificación de qué tan frecuente es probable que ocurra un evento de interés particular entre un gran número de ensayos.

La fórmula general para presentar una probabilidad es como sigue:

Cálculo de una probabilidad

$$p\,[\text{de éxito}] = \frac{\#\text{ éxitos}}{\#\text{ ensayos}} = \frac{\#\text{ resultados exitosos posibles}}{\#\text{ total de resultados posibles}}$$

donde p [de éxito] = probabilidad del "evento de interés".

Para la consistencia en la instrucción, en este texto las respuestas a los cálculos de probabilidad se redondearán y se presentarán con cuatro lugares decimales. Por supuesto, las probabilidades también pueden presentarse como porcentajes, multiplicando *p* por 100. Aquí hay algunos ejemplos que revelan qué tan simple es la noción de probabilidad:

Ejemplo A: Al lanzar una sola moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener *cara*?

Con una moneda existen dos resultados posibles, y cara es uno de ellos. Así:

$$p\,[\text{cara}] = \frac{\#\text{ de caras}}{\#\text{ de posibles resultados}} = \frac{1}{2} = .5000$$

Ejemplo B: Cuando se toma una sola carta al azar de un paquete estándar de 52 cartas:

a) $p\,[\text{rey}] = \frac{\#\text{ de reyes en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} = \frac{4}{52} = .0769$

b) $p\,[7] = \frac{\#\text{ de 7 en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} = \frac{4}{52} = .0769$

c) $p\,[\text{corazones}] = \frac{\#\text{ de corazones en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} = \frac{13}{52} = .2500$

Ejemplo C: Cuando se toma una sola canica al azar de una caja de 300, donde 100 son rojas y 200 son verdes:

a) $p\,[\text{roja}] = \frac{\#\text{ de rojas en la caja}}{\#\text{ total de canicas en la caja}} = \frac{100}{300} = .3333$

b) $p\,[\text{verde}] = \frac{\#\text{ de verdes en la caja}}{\#\text{ total de canicas en la caja}} = \frac{200}{300} = .6667$

Como estas ilustraciones revelan, calcular una probabilidad es simplemente una cuestión de pensamiento proporcional respecto de la ocurrencia a largo plazo de un evento de interés. Preguntar ¿cuál es la probabilidad? es cuestionarse sobre cuántas, del total de veces, ocurre una categoría de eventos, es decir, ¿cuántas de esas veces podemos esperar cierto resultado? Esta expectativa se expresa entonces como una proporción o porcentaje.

Reglas básicas de la teoría de la probabilidad

Existen sólo unas cuantas reglas básicas a seguir para calcular cualquier probabilidad. Todos los cálculos de probabilidades emplean estas reglas esenciales.

Regla de probabilidad 1: las probabilidades siempre oscilan entre 0 y 1

Puesto que las probabilidades son proporciones, su límite numérico inferior es cero (el evento no puede suceder) y su límite numérico superior es 1.00 (el evento debe suceder). En otras palabras, las probabilidades siempre se calculan entre 0.00 y 1.00 (o 0 por ciento y 100 por ciento). Si éste no es el caso, ha ocurrido un error matemático.

Algunos eventos tienen una probabilidad cero de ocurrencia —nunca suceden (por ejemplo, permanecer vivo bajo el agua durante 24 horas sin dispositivos de sobrevivencia)—. Algunos eventos ocurren con una probabilidad del 100 por ciento —siempre suceden (por ejemplo, que el sol salga mañana)—. Muchos eventos, sin embargo, no están tan definidos; sus probabilidades de ocurrencia están en alguna parte entre *nunca* y *siempre*.

Regla de probabilidad 2: la regla de adición para eventos alternativos

A veces deseamos definir "éxito" como más de un solo evento característico. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de sacar un rey o un as de un paquete de cartas? Aquí tenemos dos alternativas para el éxito: un rey o un as. La **regla de adición para eventos alternativos** establece que la *probabilidad de eventos alternativos es igual a la suma de las probabilidades de los eventos individuales*. Por consiguiente,

$$p\,[\text{rey o as}] = p\,[\text{rey}] + p\,[\text{as}]$$

$$= \frac{\#\text{ reyes en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} + \frac{\#\text{ ases en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}}$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = .1538 \text{ (aproximadamente 15\%)}$$

Un simple truco para seguir con la regla de adición es reemplazar la palabra *o* con un signo de adición, +.

No vuelva esto complicado. La regla de adición es sólo una guía para ayudarnos a calcular una probabilidad cuando existen varias maneras de obtener el éxito. En el caso de sacar un as o un rey, hay ocho maneras. (Si no está convencido, cuente los ases y reyes en un paquete de cartas.)

En capítulos posteriores usaremos el símbolo P (mayúscula) para representar la probabilidad de éxito; y Q, para representar la probabilidad de fracaso. (Estos símbolos probablemente evocaron el viejo adagio: "Tenga mucho cuidado con sus p y q."). La regla de adición lleva a un punto importante: la probabilidad de éxito o fracaso debe ser 1.00; es decir, $P + Q = 1$. De esto se desprende que si conocemos P, entonces Q puede calcularse rápidamente. Es decir,

$$Q = 1 - P$$

De igual forma,

$$P = 1 - Q$$

Por ejemplo, si $P = p$ [rey o as], entonces

$Q = p$ [cualquier carta distinta de rey o as] $= 1 - p = 1 - .1538 = .8462$ (aproximadamente 85%)

En otras palabras, si tenemos cerca del 15 por ciento de oportunidad de sacar un rey o un as, entonces tenemos aproximadamente 85 por ciento de oportunidad de no sacarlos.

Regla de probabilidad 3: ajuste para las ocurrencias conjuntas

A veces el éxito para un evento no es directo porque un resultado en particular es exitoso en más de una manera. Por ejemplo, al sacar una sola carta de un paquete estándar de 52, existe un problema en el siguiente cálculo que usa la regla de adición:

$$p\,[\text{rey o reina o corazón}] = p\,[\text{rey}] + p\,[\text{reina}] + p\,[\text{corazón}]$$

Incorrecto

$$= \frac{\#\text{ reyes} + \#\text{ reinas} + \#\text{ corazones en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} = \frac{21}{52} = .4038$$

Esta respuesta es incorrecta. Si tomamos un paquete de cartas y contamos "cartas de éxito" (reyes, reinas y corazones) encontraremos 19, no 21. Éste es el caso porque cuando sumamos las probabilidades separadas, contamos al rey y a la reina de corazones dos veces. Siendo un rey y un corazón, el rey de corazones es exitoso dos veces (puesto de otra manera, las características no son mutuamente excluyentes). De igual manera, doble éxito ocurre para la reina de corazones.

Cuando tenemos *un evento que tiene doble éxito o une dos aspectos de éxito*, lo llamamos **ocurrencia conjunta**. (Es lo mismo como cuando juntamos una frecuencia de ocurrencia de categorías de dos variables en las casillas de una tabulación cruzada; véase capítulo 2). Para calcular la probabilidad correcta, debemos restar cada ocurrencia conjunta para eliminar este doble conteo. En este caso, la reina de corazones y el rey de corazones, cada uno, son una ocurrencia conjunta. Así:

$$p\,[\text{rey o reina o corazón}]$$

$$= \{p\,[\text{rey}] + p\,[\text{reina}] + p\,[\text{corazón}]\} - \{p\,[\text{ocurrencias conjuntas}]\}$$

$$= \frac{\#\text{ reyes} + \#\text{ reinas} + \#\text{ corazones en el paquete}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}} - \frac{2\text{ ocurrencias conjuntas}}{\#\text{ total de cartas en el paquete}}$$

$$= \frac{21}{52} - \frac{2}{52} = \frac{19}{52} = .3654.$$

Regla de probabilidad 4: la regla multiplicativa para eventos compuestos

Algunos eventos tienen dos o más partes. A estos *eventos con partes múltiples* los llamamos **eventos compuestos** (al igual que en química, donde un *compuesto* como el agua se define como una substancia compuesta de dos o más elementos, en este caso hidrógeno y oxígeno). Por ejemplo, definimos el éxito como sacar un par de ases del paquete, es decir, sacar un as, regresándolo, barajar una vez más (es decir, al azar), y entonces sacar de nuevo un as. La **regla multiplicativa para eventos compuestos** señala que *la probabilidad de un evento compuesto es igual al múltiplo de las probabilidades de las partes separadas del evento*. Así,

$$p\,[\text{as luego as}] = p\,[\text{as}] \circ p\,[\text{as}]$$

$$= \frac{4}{52} \circ \frac{4}{52} = \frac{16}{2\,704} = .0059$$

Un simple truco a seguir consiste en reemplazar la palabra *luego* (o *y*) con el signo de multiplicación, ∘.

No vuelva esto complicado. Matemáticamente, la regla multiplicativa simplemente calcula el número de éxitos en el numerador de la fracción y el número total de eventos posibles en el denominador. De acuerdo con esto, resulta que si pasamos meses sacando una carta, reemplazándola, barajando de nuevo, sacando una segunda carta y registrando los resultados, descubriríamos que hay 2 704 combinaciones posibles de dos cartas. Y descubriríamos que hay 16 posibles combinaciones de pares de ases, como se indica en la figura 6-1. ¡Gracias a Dios existen los matemáticos! Ellos notaron con astucia que en lugar de tener que identificar estas combinaciones pieza por pieza, sólo necesitamos multiplicar las probabilidades separadas.

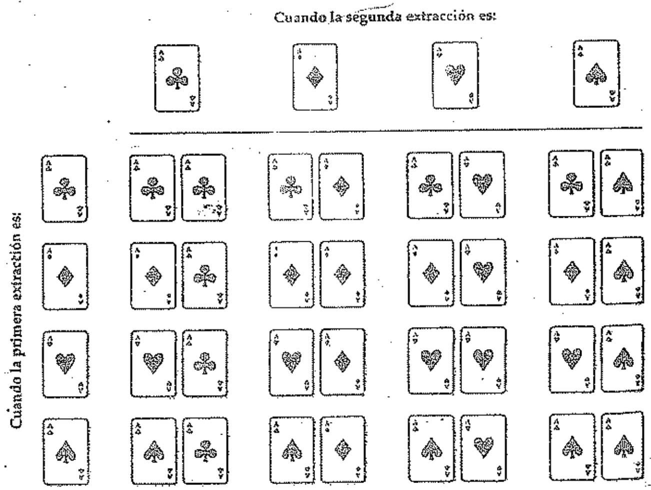
El simple ejercicio de arrojar una moneda reforzará la simplicidad de la regla multiplicativa. Calculemos la probabilidad de lanzar una moneda dos veces y obtener cara ambas veces:

$$p\,[\text{cara luego cara}] = p\,[\text{cara}] \circ p\,[\text{cara}]$$

$$= .5 \circ .5 = .2500 \text{ (o 1 de 4)}$$

FIGURA 6-1

Posibles combinaciones de ases cuando se extrae al azar una carta, se reemplaza y se toma al azar una segunda carta



Como se muestra en la figura 6-2, lanzar dos monedas (o lanzar una sola dos veces) tiene cuatro posibles resultados y sólo uno de ellos es cara luego cara.

Para comprender esto realmente, haga su propio gráfico para la probabilidad de obtener todas caras al lanzar tres monedas. (Matemáticamente, las probabilidades de eventos dicotómicos se calculan ampliando la fórmula de distribución binomial; véase capítulo 13.)

Regla de probabilidad 5: explicación del reemplazamiento con eventos compuestos

Cuando ilustramos la regla 4, la regla multiplicativa para eventos compuestos, calculamos la probabilidad de sacar un par de ases y encontramos que $p = .0059$.

Estipulamos que la primera carta obtenida sería devuelta al paquete antes de sacar la segunda. Esta estipulación para calcular la probabilidad de un evento compuesto se llama "con reemplazamiento". Si no hubiéramos devuelto la primera carta, el cálculo se habría realizado "sin reemplazamiento" y la probabilidad calculada habría sido diferente:

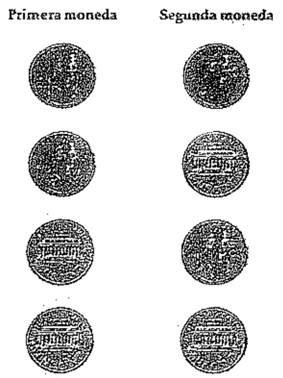
$$p\,[\text{as luego as}] \text{ sin reemplazamiento} = p\,[\text{as}] \circ p\,[\text{as}]$$

$$= \frac{4}{52} \circ \frac{3}{51} = \frac{12}{2\,652} = .0045$$

La probabilidad del primer as es la misma con o sin reemplazamiento porque el evento empieza con 52 cartas y cuatro ases. Pero si la primera carta obtenida es un as *y no hay reemplazamiento*, entonces al sacar la segunda sólo hay 51 cartas en el

FIGURA 6-2

Posibles resultados de dos monedas lanzadas



paquete, y sólo tres son ases. Debe prestarse mucha atención en las cuestiones de reemplazamiento en eventos compuestos. Se ajustan numeradores y denominadores consecuentemente. Por ejemplo, calculemos lo siguiente:

$$p\,[\text{as luego rey luego as}]\ \text{sin reemplazamiento} = p\,[\text{as}] \bullet p\,[\text{rey}] \bullet p\,[\text{as}]$$

$$= \frac{4}{52} \bullet \frac{4}{51} \bullet \frac{3}{50} = \frac{48}{132\,600} = .0004$$

Finalmente, no todos los eventos compuestos implican cuestiones de reemplazamiento. Por ejemplo, el reemplazamiento no es una cuestión que tenga que ver en el lanzamiento de una moneda. Las probabilidades calculadas son las mismas para "cara luego cara" al lanzar dos monedas a la vez o al lanzar una moneda dos veces.

Las cinco reglas de probabilidad son fundamentales; es decir, deben considerarse para calcular la probabilidad de cualquier evento, no importa lo simple o complicado que el evento sea. Los ejemplos simples presentados en este capítulo ilustran tales principios básicos. Formulaciones mucho más complejas de probabilidades se presentan en textos avanzados como el de Lee y Maykovich (1995). Por fortuna, para los estudiantes y los investigadores de hoy, no es necesario tener habilidades matemáticas extensas para calcular probabilidades. Los programas de computación sólo requieren que aprendamos qué botones oprimir o qué tabla leer para obtener respuestas a las preguntas de probabilidad. *Sin embargo, una comprensión cabal de la teoría básica de probabilidad, es necesaria para evitar interpretaciones erróneas de dicha información de la computadora.* Es más, una comprensión de la teoría de la probabilidad es esencial para adquirir la imaginación estadística.

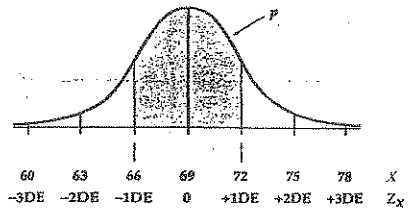
Uso de la curva normal como una distribución de probabilidad

Pensamiento proporcional respecto de un grupo de casos y casos únicos

Como observamos en el capítulo 5, la desviación estándar sirve para examinar la forma en que las puntuaciones se dispersan en una distribución, y para comparar la dispersión de dos o más muestras. Sin embargo, podemos lograr mucho más con la desviación estándar. Con una sola variable de intervalo/razón *que tenemos razón para creer que está normalmente distribuida en su población*, podemos calcular puntuaciones estandarizadas (puntuaciones Z) y usarlas para determinar la proporción (*p*) de puntuaciones de una población que caen entre cualesquiera dos puntuaciones en la distribución. Puesto que la curva normal tiene una forma inconfundible, podemos identificar y medir áreas porque éstas representan una proporción de casos.

Recuerde del capítulo 5 que una puntuación Z nos dice cuántas desviaciones estándar está alejada una puntuación bruta (o puntuación X) de la media:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{s_x} = \text{número de desviaciones estándar (DE) desde la media}$$



Notamos que apenas el 68 por ciento de los casos en una población normalmente distribuida tienen puntuaciones X dentro de una distancia de 1 desviación estándar en ambos lados de la media (es decir, entre una puntuación Z de más y menos 1). Por ejemplo, suponga que tenemos la siguiente información, donde X = estatura para una muestra de hombres en un club deportivo:

$\overline{X} = 69$ pulgadas $s_x = 3$ pulgadas La distribución es normal

Puesto que esta distribución es normal, tracemos la curva normal para obtener un sentido de proporción respecto de cuántos hombres son tan altos. Nuestro conocimiento básico de la curva normal nos dice que casi 68 por ciento están entre 66 y 72 pulgadas, como se indica en la curva de la figura de arriba. Es más, ya que la mediana se localiza en la media, sabemos que la mitad de los hombres están debajo de las 69 pulgadas (cinco pies, nueve pulgadas) y la otra mitad está arriba. Y como casi el 99 por ciento de una población normalmente distribuida cae dentro de tres puntuaciones Z en ambos lados de la media, muy pocos son más bajos que 60 pulgadas o más altos que 78 pulgadas.

Así,

$$p\,[\text{de } X = 66 \text{ a } X = 72] = \text{aproximadamente } 68\%$$

De hecho, con la ayuda de una tabla estadística, podemos calcular puntuaciones Z y usarlas para determinar cualquier área bajo la curva. Este procedimiento se llama partición de áreas bajo la curva normal, y en breve haremos algunas particiones.

Como resulta, las áreas bajo la curva normal representan probabilidades de ocurrencia. Observe que utilizamos el símbolo *p* para representar proporciones y probabilidades. Las probabilidades son proporciones del número de veces que se tiene éxito de todas las posibles ocurrencias. Conocer la proporción de éxito de la población en conjunto nos da la probabilidad de éxito por un solo sujeto. En otras palabras, un área especificada bajo la curva normal proporciona la probabilidad de ocurrencia de cualquier puntuación sola que cae entre cualesquiera dos valores.

Para ilustrar esta relación, suponga que estamos matando el tiempo en el club deportivo. Para entretenernos, jugamos un extraño juego llamado "adivine la estatura." Las reglas del juego son tales que cuando oímos a alguien acercarse desde la esquina, suponemos su estatura y después se la preguntamos cuando se acerca. Si estamos dentro de 3 pulgadas de la estatura correcta, ganamos.

¿Cómo podemos mejorar nuestras oportunidades de ganar? Sabemos que las estaturas de los miembros del club están normalmente distribuidas alrededor de una media de 69 pulgadas, con una desviación estándar de 3 pulgadas. Esto nos dice que aproximadamente 68 por ciento de los hombres están entre 66 y 72 pulgadas de estatura. Pensemos probabilísticamente; es decir, miremos a futuro. Por cada 100 hombres que se aproximen, 68 caerán en el rango de "éxito":

$$p\left[\begin{array}{l}\text{de que la estatura del próximo hombre}\\ \text{se encuentre entre 66 y 72 pulgadas}\end{array}\right] = \frac{\#\text{hombres de esa estatura}}{100 \text{ que se aproximan}} = \frac{68}{100} = .6800$$

Si suponemos 69 pulgadas, nuestra oportunidad de ganar, entonces, es de aproximadamente 68 por ciento —lo que no es una mala probabilidad. Para obtener un sentido de proporción sobre lo anterior, imagine que los miembros del club son 100 canicas en una caja, con canicas verdes que representan aquéllos con estaturas entre 66 y 72 pulgadas. Hay 68 canicas verdes y la probabilidad de tomar una al azar es de .6800 o 68 por ciento.

En una distribución normal de puntuaciones, 1) la proporción de casos entre dos puntuaciones, 2) el área bajo la curva entre estas dos puntuaciones, y 3) la probabilidad de seleccionar un caso al azar entre estas puntuaciones *son todos los mismos*. Por eso es que usamos p para representar todas estas ideas. Por ejemplo, el símbolo p [de $X = 66$ hasta $X = 72$] puede emplearse e interpretarse de tres maneras:

1. *Una interpretación distributiva que describa el resultado respecto a la distribución de puntuaciones en una población o muestra.* Así, casi .6800 (o 68 por ciento) de los hombres en el club están entre 66 y 72 pulgadas de estatura.
2. *Una interpretación gráfica que describa la proporción del área bajo una curva normal* (suponiendo que la distribución tiene forma normal). Así, casi 68 por ciento del área bajo la curva normal cae entre las puntuaciones X de 66 y 72 pulgadas.
3. *Una interpretación probabilística que describa la probabilidad de una sola extracción al azar de un sujeto de esta población.* Así, si un miembro al azar del club se aproxima, hay cerca de .6800 de oportunidad de que esté entre 66 y 72 pulgadas de estatura.

Tres formas de interpretar el símbolo p

1. Una interpretación distributiva que describa el resultado respecto a la distribución de puntuaciones en una población o muestra.
2. Una interpretación gráfica que describa la proporción del área bajo una curva normal (suponiendo que la distribución tiene forma normal).
3. Una interpretación probabilística que describa la probabilidad de una sola extracción al azar de un sujeto de esta población.

Las tres interpretaciones están afirmando lo mismo: Aproximadamente 68 por ciento de los hombres oscilan entre 66 y 72 pulgadas de estatura. Debido a su interpretación probabilística, a menudo la curva normal se llama curva de probabilidad.

Estas distinciones también resaltan un punto importante sobre las probabilidades de los eventos. Aunque sea para un solo tipo de "éxito", cualquier probabilidad está basada en la distribución entera de todos los eventos posibles. Un evento singular es evaluado en relación a un conjunto mayor de ocurrencias. Este tipo de pensamiento proporcional es básico para desarrollar la imaginación estadística.

Partición de áreas bajo la curva normal

Partir un área bajo la curva normal consiste en *identificar parte de la curva y calcular la proporción (p) de la curva total que dicha parte representa*. Usamos la tabla de la distribución normal (Tabla estadística B en el apéndice B) cuando hacemos la partición. ¿De dónde vienen los números de esta tabla? Hace tiempo, los estadísticos descubrieron cómo las ocurrencias de muchos fenómenos naturales se ajustan a la forma de campana de la curva normal. Ellos realizaron ejercicios matemáticos sobre este fenómeno y encontraron la media, la desviación estándar y las puntuaciones Z. Después formularon áreas o proporciones (p) bajo la curva. Estas áreas son fijas y se aplican a cualquier variable normalmente distribuida porque la normalidad es una ocurrencia natural —como la gravedad. La tabla de la curva normal proporciona áreas bajo la curva calculadas de manera precisa. Una cosa debe enfatizarse aquí: tales particiones de áreas usando la media, la desviación estándar, las puntuaciones Z, y la curva de la distribución normal *sólo funcionan si tenemos razones para creer que las puntuaciones en una población están normalmente distribuidas*. Si la distribución de las puntuaciones está sesgada o, de otro modo, singularmente formada, la tabla de la curva normal no se utiliza en los cálculos.

Partición de un área bajo la curva normal

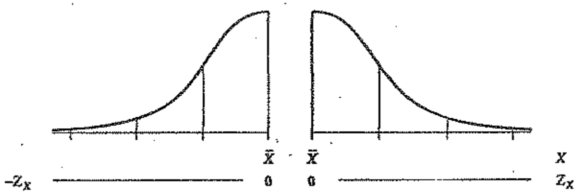
Identificar parte de la curva y calcular la proporción (p) de la curva total que dicha parte representa.

La tabla de la curva normal proporciona lo necesario para calcular exactamente la extensión del área bajo la curva entre cualesquiera de las dos puntuaciones, o a los lados de cualquier puntuación individual. Recuerde que un área bajo la curva representa una proporción (p) de la población entre las puntuaciones en bruto correspondientes a esa sección de la curva. Estas p se calculan con cuatro lugares decimales. Se ilustra la información en la tabla de la curva normal en la figura 6-3. Como se anotó en la figura 6-3A, la columna A de la tabla de la curva normal lista las puntuaciones Z, donde: Z_X es el número de *desviaciones estándar* que una puntuación X se desvía de la media. La columna A proporciona sólo puntuaciones Z *positivas*, o aquellas que se aplican al lado derecho de la curva normal. Pero la curva es simétrica (es decir, el lado izquierdo es una imagen en espejo del lado derecho). Por consiguiente, la columna A puede emplearse con puntuaciones Z *negativas*, simplemente imaginando un signo negativo delante de las entradas.

La columna B de la tabla de la curva normal muestra el área desde la media hasta una puntuación Z como se ilustra en la figura 6-3B. Por ejemplo, observe en la tabla de la curva normal una puntuación Z de 1.00 en la columna A. El número en la columna B es .3413 (aproximadamente 34 por ciento). Para el club deportivo podemos decir que 34 por ciento de los miembros oscilan entre las estaturas de 69 y 72 pulgadas. De igual manera, vemos esta puntuación Z como −1.00 y, de nuevo, en la columna B se lee .3413, la proporción de miembros cuyas estaturas oscilan entre 66 y 69 pulgadas. Dos veces .3413 es .6826, o casi 68 por ciento —la proporción entre 66 y 72 pulgadas— que notamos cae dentro de 1 desviación estándar hacia ambos lados de la media. Además, dijimos que cerca del 95 por ciento de las puntuaciones en cualquier distribución normal caen dentro de aproximadamente

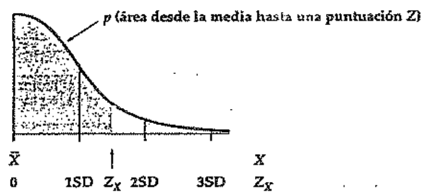
FIGURA 6-3
Información proporcionada en las columnas de la tabla de distribución normal (Tabla estadística B en Apéndice B)

A. En la columna A: Puntuaciones Z calculadas para un lado de la curva o el otro



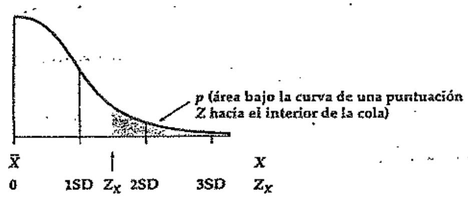
B. En la columna B: Área bajo la curva de la puntuación Z para un valor de X y más allá

Columna B.



C. En la columna C: Área bajo la curva de la puntuación Z para un valor de X y más allá

Columna C.



2 desviaciones estándar de la media. En realidad, 95 por ciento caen dentro de 1.96 DE (una puntuación Z) hacia ambos lados de la media. Empiece a aprender a usar la tabla encontrando estas puntuaciones Z en la columna A, y comparando las áreas en la columna B.

La columna C de la tabla de la curva normal da el área bajo la curva de una puntuación Z y más allá en la "cola" de la curva, como en la figura 6-3C. Por ejemplo, .1587 (o 15.87 por ciento) de las puntuaciones en una distribución normal caen a la derecha de una puntuación Z de 1.00 o a la izquierda de una puntuación Z de −1.00. Esto se encuentra observando una puntuación Z de 1.00 en la columna A y después el número .1587 en la columna C.

Antes notamos que cualquier variable normalmente distribuida tiene una mediana igual a la media. Así, 50 por ciento de las puntuaciones en cualquier distribución normal caen en una u otra dirección de la media. Puesto que la tabla proporciona la mitad de la curva, note que para cualquier puntuación Z, las columnas B y C suman .5000 o 50 por ciento. Por último, tenga presente que las puntuaciones Z pueden ser positivas o negativas, dependiendo de si una puntuación bruta está arriba o debajo de la media, respectivamente. Las puntuaciones Z pueden ser infinitamente grandes, aunque por lo común en la práctica caen entre aproximadamente −3.00 y 3.00 porque en una distribución normal casi el 100 por ciento de los casos caen dentro de 3 desviaciones estándar hacia ambos lados de la media. Sin embargo, las *áreas* en las columnas B y C de la tabla de la curva normal, siempre son positivas; estas áreas ilustran el espacio. Un espacio de cero es la cantidad más pequeña que se tiene; y 100 por ciento del espacio, la más grande.

Ejemplos de problemas al usar la curva normal

Para mostrar la utilidad de la tabla de la curva normal, resolvamos trabajar algunos problemas de la muestra. Tenga presente que la partición está basada en la media y la desviación estándar; por consiguiente, la variable debe ser de intervalo/razón (aunque una variable ordinal puede ser empleada en situaciones informadas). Además, para usar la tabla de la curva normal debemos asegurarnos de que la variable está normalmente distribuida en la población. La distribución no puede ser asimétrica, puntiaguda, plana, bimodal o de alguna otra forma. La normalidad se determina mejor observando el histograma de la variable, para identificar la distintiva forma de campana. No obstante, si el histograma de una variable se hace *para una muestra* y la distribución de las puntuaciones no tiene una forma perfecta de campana, la variable todavía podría estar normalmente distribuida *en la población*. La diferencia en la forma podría deberse al error de muestreo. En este texto no trataremos este refinado punto, sólo señalaremos que suponemos que la variable está normalmente distribuida en la población; en pocas palabras, "asumimos la normalidad".

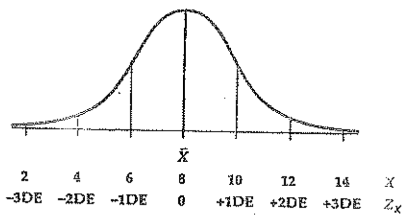
Supongamos que hemos realizado entrevistas a 500 mujeres que están recibiendo pagos de asistencia de ayuda familiar. Nos referiremos a estas mujeres como destinatarias de la asistencia. (En lenguaje común se les llama madres de beneficencia, un término de alguna forma políticamente tendencioso.) El interés que tenemos en estas mujeres es conocer cómo la pobreza afecta su autoestima, un sentimiento individual de "valía, adecuación, competencia y capacidad de agradar" (Ensminger 1995: 351). Suponga que medimos la autoestima con una escala de actitud de 20 puntos, que tiene un nivel de medida de intervalo. La puntuación de autoestima media es de 8 con una desviación estándar de 2. Un histograma nos asegura que la distribución tiene una forma normal. Comenzamos estos ejercicios tomando un inventario de información conocida, la cual es dada en el problema.

Especificaciones: Una variable de intervalo X = autoestima y sus valores brutos (no mostrados). De estas puntuaciones obtenemos los siguientes estadísticos:

$$\overline{X} = 8 \text{ puntos de autoestima} \quad s_X = 2 \text{ puntos de autoestima}$$

$n = 500$ Suponga una distribución normal

Sugerencia de estudio: Trace la curva de forma de campana en todos los problemas. Siempre es una buena práctica trazar la curva normal. Marque la media y 3 desviaciones estándar en ambas direcciones. Clasifique la curva para X (en este caso, puntuaciones de autoestima) y para las puntuaciones Z. *Recuerde:* X es una puntuación bruta con una unidad de medida de puntos de autoestima, Z_X es una puntuación Z o estandarizada con unidades de medida de desviaciones estándar (DE), y p es una proporción del área bajo la curva.



Nuestro conocimiento básico de la distribución normal nos indica lo siguiente: 1) 50 por ciento de las destinatarias de la asistencia tienen puntuaciones arriba de 8 y 50 por ciento, debajo de 8; 2) aproximadamente 68 por ciento puntúan entre 6 y 10 en la medida de autoestima; 3) cerca del 95 por ciento está entre 4 y 12, y 4) casi todos —más de 99 por ciento— están entre 2 y 14.

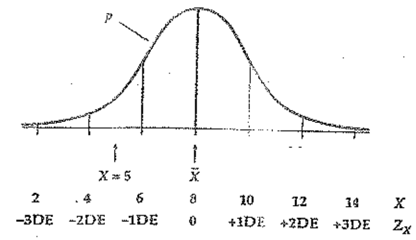
Usamos la tabla de la curva normal para contestar varios tipos de preguntas sobre la distribución de la autoestima entre las destinatarias de la asistencia familiar. **Sugerencia de estudio importante:** La tabla de la curva normal requiere puntuaciones Z. Cuando dude respecto de cómo empezar un problema, calcule las puntuaciones Z.

Problema tipo 1: [de casos desde la media hasta una puntuación X]. Encuentre la proporción (p) de casos entre la media y alguna puntuación X.

Plan de solución: Trace y clasifique la curva normal para la variable X; sombree el área designada (p) desde la media hasta la puntuación X especificada; calcule la puntuación Z para esa puntuación X; localice la puntuación Z en la columna A de la tabla de la curva normal; obtenga la p en la columna B; informe la respuesta en términos cotidianos.

Ilustración: ¿Qué porcentaje de las destinatarias de la asistencia social tienen puntuaciones de autoestima entre 5 y 8?

Identifique esta área de interés, p.



La columna B en la tabla de la curva normal proporciona áreas bajo la curva desde la media hasta cualquier puntuación Z. Al trazar la curva, observamos que el área de interés (p) está limitada por la media; así, p es un área "tipo columna B".

El próximo paso para resolver problemas consiste en transformar una puntuación bruta en una puntuación Z:

$$Z_X = \frac{X - \overline{X}}{s_X} = \frac{5-8}{2} = \frac{-3}{2} = -1.50 \text{ DE}$$

Recuerde que una puntuación Z es simplemente otra manera de expresar una puntuación bruta. Una destinataria de la asistencia que tiene 5 en autoestima cae 1.50 DE *debajo* de la media, la puntuación Z *negativa* de −1.50; ella está entre las personas con muy baja autoestima. En la columna A de la tabla de la curva normal, encuentre 1.5 y considérelo como −1.5. Busque en la columna B e informe la respuesta como sigue:

$$p\,[\text{de } X = 5 \text{ a } X = 8] = .4332; \quad \% = p\,(100) = 43.32\%$$

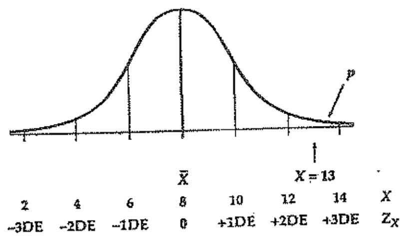
Finalmente, conteste la pregunta en términos cotidianos: un poco más de 43 por ciento de las destinatarias de la asistencia están entre 5 y 8 en la medida de autoestima. (Ésta es una interpretación distributiva que describe el resultado respecto de la distribución de las puntuaciones de la población de las destinatarias de la asistencia familiar.) Si un nombre se selecciona al azar del archivo de casos, hay aproximadamente 43 por ciento de oportunidad que esta persona tenga una puntuación entre 5 y 8 en la medida de autoestima. (Ésta es una interpretación probabilística, la probabilidad de que una sola elección al azar entre las destinatarias de asistencia caiga en el área de interés.) Calculamos porcentajes y sustituimos el término *oportunidad* por *probabilidad* para lograr claridad en la expresión ante el público en general.

2) **Problema tipo 2: p [de casos mayores que una puntuación X].** Encuentre la proporción (p) de casos mayores que una puntuación X especificada.

Plan de solución: Trace y clasifique la curva normal para la variable X; sombree el área de interés (p) desde la puntuación X hacia la cola en la *dirección positiva* o *"mayor que"*; calcule la puntuación Z y localícela en la columna A; obtenga la p en la columna C.

Ilustración: ¿Qué proporción de las destinatarias de la asistencia están en una puntuación igual o mayor que 13 en la escala de la autoestima?

Sombree el área de interés, p:



Calcule la puntuación Z para X = 13:

$$Z_X = \frac{X-\overline{X}}{s_X} = \frac{13-8}{2} = \frac{5}{2} = 2.50 \text{ DE}$$

Encuentre 2.50 en la columna A de la tabla de la curva normal. Mire en la columna C y reporte la proporción del área mayor o igual a 13 como sigue:

$$p\,[\text{de } X \geq 13] = .0062$$

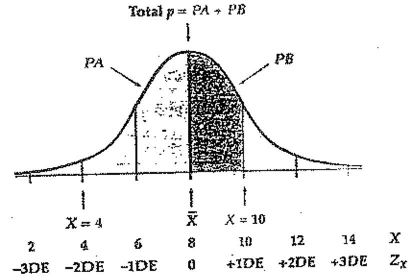
Conteste la pregunta en términos cotidianos: Sólo 62 de cada 10 000 destinatarias de asistencia tienen una puntuación de 13 o mayor en la escala de autoestima. (En una muestra de 500 esto sería de aproximadamente tres personas.) Muy pocas destinatarias de la asistencia tienen una autoestima extremadamente alta. Si un nombre del archivo de casos fuera seleccionado al azar, habría menos de 1 por ciento de oportunidad de que esta persona tuviera una puntuación arriba de 13.

3) **Problema tipo 3: p [de casos entre dos puntuaciones X en lados diferentes de la media].** Encuentre la proporción de casos entre dos puntuaciones X, una debajo de la media y otra sobre la media.

Plan de solución: Trace y clasifique la curva normal; sombree el área de interés (p) desde una puntuación X hasta la otra; calcule las puntuaciones Z para las dos puntuaciones X; localícelas en la columna A de la tabla de la curva normal; obtenga las áreas PA y PB (trazadas abajo) en la columna B; calcule el área (p) que será la suma de PA y PB.

Ilustración: ¿Qué proporción de las destinatarias de la asistencia obtienen una puntuación entre 4 y 10 en la escala de autoestima? (*Sugerencia de estudio:* Sólo trazando la curva podemos observar rápidamente que este problema implica dos áreas contiguas a la media: dos áreas de tipo columna B).

Sombree el área de interés, p:



Calcule las puntuaciones Z para X = 4 y X = 10:

$$Z_X = \frac{X-\overline{X}}{s_X} = \frac{4-8}{2} = \frac{-4}{2} = -2.00 \text{ DE}$$

$$Z_X = \frac{X-\overline{X}}{s_X} = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1.00 \text{ DE}$$

Ahora use la tabla de la curva normal. En la columna A encuentre cada una de las dos puntuaciones Z. Mire la columna B para obtener las áreas PA y PB y reporte la respuesta como sigue:

$PA = p\,[\text{de } X = 4 \text{ a } X = 8] = .4772$
$PB = p\,[\text{de } X = 8 \text{ a } X = 10] = .3413$
$p\,[\text{de } X = 4 \text{ a } X = 10] = PA + PB = .4772 + .3413 = .8185$
$\% = p\,(100) = 81.85\%$

Conteste la pregunta en términos cotidianos: aproximadamente 82 por ciento de las destinatarias de la asistencia tienen puntuaciones de autoestima entre 4 y 10. Si se selecciona un nombre al azar del archivo de casos, hay 82 por ciento de oportunidad de que esta persona tenga una puntuación de autoestima entre 4 y 10.

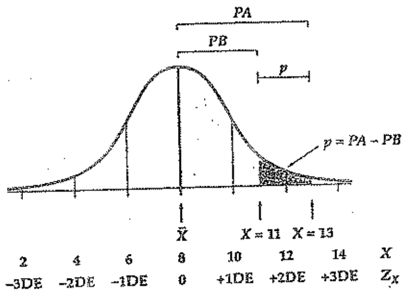
Problema tipo 4: *p* [de casos entre dos puntuaciones X en un lado de la media]. Encuentre la proporción (p) de casos entre dos puntuaciones X *en un lado* de la media.

Plan de solución: Trace y clasifique la curva; sombree el área de interés (p) desde una puntuación X hasta la otra; calcule las puntuaciones Z y localícelas en la columna A de la tabla de la curva normal; obtenga las áreas PA y PB en la columna B; calcule el área p, que es PA menos PB.

Ilustración: ¿Qué proporción de las destinatarias de la asistencia oscilan entre 11 y 13 en la escala de autoestima? En la muestra de 500, *¿cuántas* destinatarias de la asistencia son?

Sugerencia de estudio: Al trazar la curva, vemos que el área de interés p no toca la media. Por consiguiente, *no* es un área tipo columna B en la tabla de la curva normal; ni es un área con forma de cola, tipo columna C. Así, para resolver esta ilustración, calculamos p indirectamente.

Sombree el área de interés p:



Calcule las puntuaciones Z para X = 13 y X = 11:

$$Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X} = \frac{13 - 8}{2} = \frac{5}{2} = 2.50 \text{ DE}$$

$$Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X} = \frac{11 - 8}{2} = \frac{3}{2} = 1.50 \text{ DE}$$

En la columna A encuentre cada una de las dos puntuaciones Z. Busque en la columna B para obtener las áreas PA y PB y reportar la respuesta como sigue:

$PA = p$ [de $X = 8$ a $X = 13$] = .4938
$PB = p$ [de $X = 8$ a $X = 11$] = .4332
p [de $X = 11$ a $X = 13$] = $PA - PB$ = .4938 – .4332 = .0606
% = p (100) = 6.06%

Sugerencia de estudio: Reste las p (es decir, las áreas bajo la curva), no las puntuaciones Z.

Para determinar cuántas de las 500 destinatarias de la ayuda están en este rango, tome la proporción del tamaño de la muestra n como sigue:

Cálculo del número de casos de la muestra que corresponden a un área

$$\# = p\,(n)$$

donde

\# = número de casos en la muestra para el área designada, p
p = proporción del área bajo la curva
n = tamaño de la muestra

El número de destinatarias de la asistencia que están entre 11 y 13 en la escala de autoestima es

$$\# = p\,(n) = .0606\,(500) = 30.3 = 30 \text{ destinatarias}$$

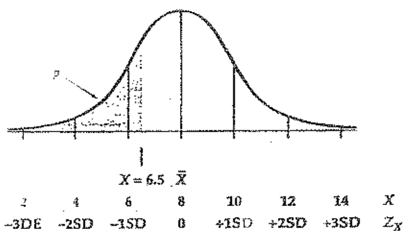
Por último, conteste estas preguntas en términos cotidianos: Sólo 6 por ciento de las destinatarias de la asistencia tienen puntuaciones de autoestima entre 11 y 13. Esto es sólo 30 de las 500 destinatarias de la asistencia. Si un nombre fuera seleccionado al azar del archivo de casos, tendría sólo una oportunidad de 6 por ciento de estar entre 11 y 13.

Problema tipo 5: *p* [de casos menores que una puntuación *X* que es menor que la media]. Encuentre la proporción (p) de casos menores que o iguales a una puntuación X específica que sea menor que la media.

Plan de solución: Trace y clasifique la curva normal; sombree el área de interés (p) de la puntuación X hacia la cola *en la dirección negativa;* calcule la puntuación Z y localícela en la columna A de la tabla de la curva normal; obtenga la p en la columna C.

Ilustración: Si un nombre fuera seleccionado al azar del archivo de casos, ¿cuál es la probabilidad de que esta destinataria de la asistencia obtenga una puntuación de 6.5 o menor en la escala de autoestima?

Sombree el área de interés, p:



Calcule la puntuación Z para $X = 6.5$:

$$Z_X = \frac{X - \overline{X}}{s_X} = \frac{6.5 - 8}{2} = \frac{-1.5}{2} = -.75 \text{ DE}$$

En la columna A de la tabla de la curva normal, encuentre .75 y trátela como si fuera −.75. Busque en la columna C y reporte la respuesta como sigue:

$$p\,[\text{de } X \leq 6.5] = .2266$$

$$\% = p(100) = 22.66\%$$

Conteste la pregunta en términos cotidianos: La probabilidad de que una destinataria de la asistencia seleccionada al azar obtuviera una puntuación de 6.5 o menor en la escala de autoestima es cerca de 23 por ciento.

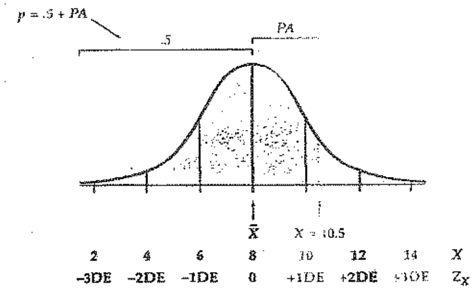
Problema tipo 6: p [de casos menores que una puntuación X mayor que la media]. Encuentre la proporción (p) de casos *menores que* una puntuación X específica que es *mayor que* la media.

Plan de solución: Trace la curva; sombree el área de interés (p); calcule la puntuación Z y localícela en la columna A; obtenga la p en la columna B y sume .5000.

Ilustración: ¿Cuál es la probabilidad (p) de que una destinataria de asistencia seleccionada al azar obtenga una puntuación de 10.5 o menor en la escala de autoestima?

Sugerencia de estudio: Recuerde que la tabla de la curva normal sólo ofrece áreas para un lado de la curva. También recuerde que una curva normal tiene una mediana igual a la media; por consiguiente, la mitad (o una proporción de .5000) de las puntuaciones caen debajo de la media. Esta ilustración se resuelve trabajando con el área sobre la media y sumando después el área bajo la media. (A propósito, para encontrar la proporción (p) de casos *mayores que* una puntuación X específica que es *menor que* la media, trabaje del lado izquierdo. Calcule el área bajo la media y luego, súmela a .5000, que es el área sobre la media.)

Sombree el área de interés p.



Calcule la puntuación Z para $X = 10.5$:

$$Z_X = \frac{X - \overline{X}}{s_X} = \frac{10.5 - 8}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25 \text{ DE}$$

En la columna A de la tabla de la curva normal, encuentre 1.25. Busque en la columna B y reporte la respuesta como sigue:

$$PA = p\,[\text{de } X = 8 \text{ a } X = 10.5] = .3944$$

$$p\,[\text{de } X \leq 10.5] = PA + .5000 = .3944 + 5000 = .8944$$

Conteste la pregunta en términos cotidianos: La probabilidad de que una destinataria de la asistencia seleccionada al azar obtuviera una puntuación de 10.5 o menor en la escala de autoestima es mayor a 89 por ciento.

Problema tipo 7: Encuentre la puntuación X que tiene una determinada p [de casos] encima o debajo de sí. Encuentre el valor de una puntuación X *bruta* arriba o debajo de la cual cae un porcentaje específico de la muestra o de la población.

Plan de solución: Mientras que los tipos de problema previos proporcionaron una puntuación X y pidieron un área (p), este problema brinda información de p y solicita una puntuación X. Trace y clasifique la curva normal; *de manera aproximada* identifique y sombree el área de interés p; encuentre esta área en la columna B o en la columna C de la tabla de la curva normal, cualquiera que sea la columna aparentemente apropiada para el trazo; lea la columna A para obtener las puntuaciones Z; resuelva para X como sigue:

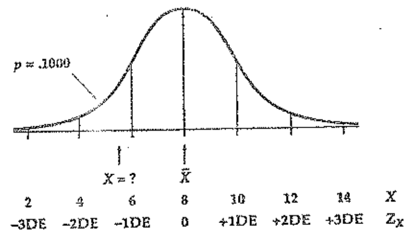
$$Z_X = \frac{X - \overline{X}}{s_X}, \qquad \text{Así, } X = \overline{X} + (s_X)\,(Z_X)$$

Ilustración: El Departamento de Salud Mental tiene un programa diseñado para prevenir episodios de depresión psicológica aguda mediante el fomento de la autoestima entre las destinatarias de la asistencia. El programa fue fundado para sólo 50 personas, entre las 500 que fueron evaluadas en su autoestima. Elijamos las 50 con autoestima más baja porque probablemente estén en mayor riesgo de padecer de depresión. ¿Cuál es la puntuación de autoestima más alta que un destinatario puede tener para calificar para el programa?

Para identificar el área de interés p, calculamos la proporción de destinatarias de la asistencia que van a calificar:

$$p\ [\text{calificar para el programa}] = \frac{\#\ \text{de calificados}}{n} = \frac{50}{500} = .1000$$

Al trazar el área de interés, tenga presente que será una cola en la dirección *negativa* de puntuaciones, porque estamos buscando las 50 destinatarias de asistencia *más bajas* en puntuación. Note que el área de interés es un área tipo columna C.



Sugerencias de estudio: En este punto, estime la respuesta a partir de la gráfica. Nuestra marca en la posición de X debe estar cerca. Sabemos ahora que sólo 15.87 por ciento de los casos caen debajo de −1 DE y así la marca de 10 por ciento debe estar debajo de ella. Por ende, nuestra puntuación X debe estar ligeramente debajo de 6. Estimando la respuesta en esta forma no sólo se motiva el pensamiento proporcional, sino que también se proporciona una advertencia por si nuestra respuesta calculada es incorrecta.

Ahora use la tabla de la curva normal. En la columna C encuentre .1000 o la cantidad más cercana a él, en este caso .1003. Mire en la columna A para encontrar la puntuación Z correspondiente a −1.28 y calcule X:

$$X = \overline{X} + (s_X)(Z_X) = 8 + (2)(-1.28) = 8 - 2.56 = 5.44 \text{ puntos de autoestima}$$

Conteste la pregunta en términos cotidianos: Aquellas destinatarias de la asistencia que obtienen una puntuación de 5.44 o menor en la escala de autoestima caen en el 10 por ciento más abajo y, por consiguiente, califican para el programa contra la depresión.

Sugerencia de estudio: El problema tipo 7 muestra que ya conocemos la media y la desviación estándar de una distribución y podemos suponer que la distribución de las puntuaciones en la población se forma normalmente, sólo se requiere una

información adicional para resolver cualquier problema. Esta parte de información puede ser una puntuación X bruta, una puntuación estandarizada, Z, o un área bajo la curva normal (p).

Así:

- Si cuenta con una puntuación X, calcule Z_X y use la tabla de la curva normal para obtener p.
- Si cuenta con una puntuación Z, utilice la tabla de la curva normal para obtener p o calcule X, donde $X = \overline{X} + (s_X)(Z_X)$.
- Si cuenta con un porcentaje o área, p, emplee la tabla de la curva normal para obtener las puntuaciones Z correspondientes y calcule X, donde $X = \overline{X} + (s_X)(Z_X)$.

Valores críticos y regiones críticas bajo la curva normal

Como veremos en capítulos posteriores, existen ciertas puntuaciones Z y áreas bajo la curva normal que son de importancia crítica en los procedimientos estadísticos y, por consiguiente, se usan con frecuencia. Éstas se llaman puntuaciones Z críticas y regiones críticas de la curva. Las regiones críticas son áreas bajo la curva que, por supuesto, se ven como probabilidades. Estas probabilidades críticas se representan con la letra griega alfa (α). ¿Por qué llamamos *críticas* a estas puntuaciones y probabilidades? Porque los procedimientos estadísticos están basados en la teoría de la probabilidad. Estas probabilidades α son decisivas al determinar el grado de confianza que asignamos a nuestros resultados reportados (capítulo 8) y también son importantes para probar hipótesis (capítulos 9 al 16). La noción de *críticas* se aclarará después. De momento, concentrémonos en la relación de estas probabilidades a críticas con la curva normal.

La puntuación Z crítica más frecuentemente usada es ± 1.96. Noventa y cinco por ciento del área bajo una curva normal cae entre +1.96 y −1.96, dejando 5 por ciento del área distribuida en las dos colas (2.5 por ciento en cada cola). El área en las colas de la curva constituye la región crítica o probabilidad α. Puesto que el enfoque está en las dos colas, esto se llama región crítica de dos colas o bilateral. Una puntuación Z crítica de ±1.96, entonces, corresponde a la región crítica "α = .05, dos colas".

También podemos tener una región crítica concentrada en un lado de la curva —una región crítica de una cola o unilateral—. Por ejemplo, la puntuación Z crítica de 1.64 es una región crítica de una cola; 5 por ciento de la curva está más allá de 1.64 en un lado. Una puntuación Z crítica de 1.64, entonces, corresponde a la región crítica "α = .05, una cola". Estas dos puntuaciones críticas y sus regiones críticas se ilustran en la figura 6-4. La tabla 6-1 es una lista de varias puntuaciones Z comúnmente usadas y los tamaños de sus regiones críticas (es decir, probabilidades α). Observe que estas regiones críticas son de tamaños "prácticos" (es decir, 5 por ciento, 1 por ciento y 0.1 por ciento). Por ejemplo, si se pide valorar el desempeño de los miembros de un grupo de música rock, usted podría responder que el grupo está dentro del 5 por ciento o 1 por ciento más alto. No es probable que usted use un porcentaje inconveniente como 4 por ciento.

Cálculo de percentiles para poblaciones normalmente distribuidas

Los problemas tipo 5, 6 y 7 de la curva normal se involucran con áreas bajo la curva que están debajo de una puntuación X bruta particular. Estas áreas definen rangos

FIGURA 6-4
Puntuaciones Z críticas para $\alpha = .05$

Ilustración A: Puntuación Z crítica de dos colas de ± 1.96; el área de la región crítica suma .05 (5%) distribuida en las dos colas.

Designada: Región crítica para $\alpha = .05$, dos colas.

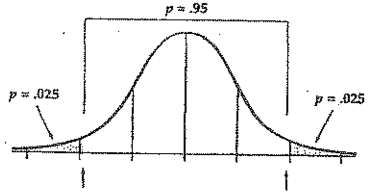


Ilustración B: Puntuación Z crítica de una cola de 1.64; el área de la región crítica suma .05 (5%) en una cola.

Designada: Región crítica para $\alpha = .05$, una cola.

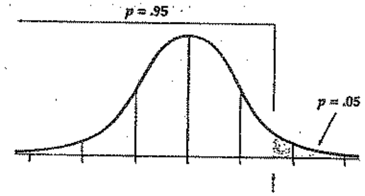


TABLA 6-1 **Puntuación Z crítica normalmente usada y probabilidades α (p en la región crítica)**

Región crítica (α)	Puntuación Z crítica (Z_α)	Área en la región crítica: En una cola p	En una cola %	En dos colas p	En dos colas Σ% de ambos lados	En dos colas (% en un lado)
$\alpha = .05$, 1 cola	1.64	.05	5%			
$\alpha = .01$, 1 cola	2.33	.01	1%			
$\alpha = .001$, 1 cola	3.08	.001	0.1%			
$\alpha = .05$, 2 colas	1.96			.05	5%	(2.5%)
$\alpha = .01$, 2 colas	2.58			.01	1%	(0.5%)
$\alpha = .001$, 2 colas	3.30			001	0.1%	(.05%)

percentilares: *el porcentaje de una muestra o población que cae en o debajo de un valor específico de una variable* (véase capítulo 2). Por ejemplo, con respecto al problema tipo 6, alguien que obtiene una puntuación de 10.5 en la escala de autoestima tiene una puntuación mayor que el 89 por ciento de las destinatarias de la asistencia en la muestra —un rango percentilar de 89. De igual manera, para el problema tipo 5, alguien que obtiene una puntuación de 6.5 alcanza un rango percentilar de 23. Cuando una variable está normalmente distribuida, podemos usar la tabla de la curva normal para calcular rápidamente rangos percentilares.

Muchas distribuciones, especialmente el rendimiento, la inteligencia y los resultados en exámenes de admisión escolar, están diseñadas de manera específica para producir una distribución de puntuaciones que esté normalmente distribuida. Todos recordamos recibir rangos percentilares además de las puntuaciones brutas para tales pruebas. Las compañías que distribuyen las pruebas las "normalizan" intencionalmente para que las distribuciones de las puntuaciones se ajusten a la curva normal. Una vez que se cumple dicha normalización, la tabla de la curva normal se utiliza para generar rangos percentilares.

Por último, debemos mencionar que los rangos percentilares pueden determinarse para distribuciones que no están normalmente distribuidas. Lo único necesario para calcular cualquier rango percentilar consiste en determinar qué porcentaje de una distribución cae debajo de una puntuación X específica. La mayoría de los programas de cómputo ofrece esta información como el "porcentaje acumulativo" de una distribución (véase capítulo 2).

La curva normal como una herramienta para el pensamiento proporcional

Una vez que hemos aprendido los detalles de cortar la curva normal en áreas, debemos empezar a apreciar realmente su utilidad. Como una herramienta descriptiva, normalizar las distribuciones de las puntuaciones en las pruebas se hace porque la experiencia ha mostrado que la inteligencia, el aprendizaje y el rendimiento se distribuyen normalmente; es decir, la mayoría de las personas se encuentran en el promedio en inteligencia y rendimiento, y ésta es la causa por la cual la curva normal se torna "acampanada" en el centro. Pocas personas son genios o están extremadamente debajo de lo normal, y esto explica que la curva empiece a aproximarse al eje horizontal cuando observamos puntuaciones de más de 1 desviación estándar de la media en cualquier dirección.

Trabajar con la curva normal también nos hace más cautos en la interpretación de datos. Ahora estamos conscientes, por ejemplo, de que las puntuaciones de diferentes pruebas (como PAU y PAS) pueden compararse revisando las posiciones relativas de las puntuaciones dentro de sus propias distribuciones; una manera simple de hacer esto es comparando los rangos percentilares.

Después de trabajar con la distribución normal, nos damos cuenta de que diferencias similares entre puntuaciones no siempre indican que una puntuación está a la misma distancia de otra en términos de lo inusual que es. Por ejemplo, suponga que los 2 000 estudiantes que ingresan al primer año en la universidad estatal tenían una puntuación media PAU (X) de 24 con una desviación estándar de 4 y la distribución estaba normalmente formada. Ronald registró 24; Barry, 28, y Sophia, 32. La observación de las puntuaciones brutas sugiere que Barry cae precisamente entre Ronald y Sophia en sus rangos en estas puntuaciones. Sin embargo, nuestro sentido de una distribución normal debería convencernos de que Barry está de manera considerable arriba del promedio aunque su puntuación sea de 28, sólo 4 puntos mejor que 24. Esto es aparente cuando se comparan las puntuaciones brutas (X), las puntuaciones estandarizadas (Z_X) y los rangos percentilares, como están en la tabla 6-2.

Lo anterior ilustra la importancia de saber cómo se dispersa una distribución de puntuaciones. Barry es mejor sólo 4 puntos que Ronald en la puntuación bruta, pero él es 34 puntos porcentuales mejor en términos de rango percentilar. Barry, como Sophia, tienen mejor puntuación que la gran mayoría de los estudiantes que ingresan. Las puntuaciones brutas por sí solas sugieren otra cosa y nos confunden. La desviación estándar, como una unidad de medida con distribuciones normales, es una poderosa herramienta para alcanzar una visión precisa sobre la importancia de una puntuación bruta.

Por último, el fenómeno de normalidad es la esencia del análisis estadístico. Es muy importante que aprendamos cómo movernos por la curva normal y desarrollar habilidades para dividir las áreas bajo ella. Un vistazo rápido a través del resto de la obra debe convencerlo de la importancia de dominar los problemas de este capítulo. Casi cada capítulo después de éste tiene ilustraciones de la curva normal o curvas de probabilidad similares.

Probabilidades: donde se intersectan el pensamiento proporcional y el control del error

Los dos grandes temas de este texto son que la estadística trata sobre el pensamiento proporcional y que uno puede aprender a controlar el error en el análisis. Estos temas convergen en el concepto de probabilidad. Por su naturaleza, las probabilidades no proporcionan información sobre un evento singular aislado, sino sobre la ocurrencia de eventos a largo plazo. Las probabilidades responden las preguntas sobre qué tan usual o inusual es la ocurrencia de algún fenómeno. Con datos recolectados de manera correcta, estas probabilidades pueden calcularse con mucha precisión.

TABLA 6-2 Comparación de puntuaciones brutas (X), puntuaciones Z y rangos percentilares para desarrollar un sentido de proporción sobre las variables normalmente distribuidas

Especificaciones		Cálculos	
Estudiante	X	Z_X	*Rango percentilar*
Ronald	24	0	50
Barry	28	1	84
Sophia	32	2	98

Muchas áreas de la vida dependen de nuestras reacciones ante los eventos. Entender que una sola ocurrencia de un evento tiene una probabilidad calculable que nos mantiene alerta y aún nos previene de reaccionar exageradamente y tomar malas decisiones. Por ejemplo, suponga que nuestra inversión accionaria favorita cae 5 por ciento de su valor en un día. ¿Se ha vuelto carente de valor como inversión? ¿Es tiempo de vender? Analícela en una imagen mayor. ¿Es raro para una acción bajar de precio? (Por supuesto que no.) Un examen de pasadas fluctuaciones en el valor puede revelar que cada nueve meses el paquete accionario baja ligeramente, sólo para rebotar con un 10 a 15 por ciento de aumento. Este análisis de tendencia a largo plazo sugiere que es tiempo para *comprar más*, no para vender.

Calcular probabilidades representa un aspecto cotidiano e importante en la elaboración de políticas y en la toma de decisiones del gobierno y de la milicia. Por ejemplo, si un país históricamente beligerante mueve numerosas tropas hacia sus fronteras, ¿significa una inminente invasión? Quizá, pero con buena "inteligencia" militar (información reunida por agentes y satélites espías) tal vez veríamos que faltan elementos críticos para llevar a cabo una invasión, como el almacenaje de municiones a largo plazo. Así, concluimos que si este país empieza una invasión, su probabilidad de éxito será baja. Aunque nuestras tropas deben estar en alerta, no reaccionamos en exceso con un golpe preventivo. Las agencias de inteligencia gubernamentales como la Agencia Central de Inteligencia (CIA) emplean gran número de estadísticos, cuyos trabajos implican la obtención de un sentido de balance y proporción calculando probabilidades.

Debido a la facilidad con que proporciona probabilidades, la distribución de la curva normal y curvas predecibles similares a ésta, se llaman distribuciones de probabilidad. Como lo veremos en el capítulo 7, los eventos muestrales tienen patrones de ocurrencia predecibles y sus curvas de probabilidad se emplean para determinar qué tan usuales son éstos. Las probabilidades en general, y la distribución de probabilidad normal en particular, son elementos importantes en el análisis estadístico.

Finalmente, un cuestionamiento interesante sobre probabilidades implica la cuestión de los eventos de baja ocurrencia. Cualquier evento natural o humano tiene *alguna* probabilidad de ocurrir. De cuando en cuando, por ejemplo, alguien es golpeado por un meteorito. Sin embargo, la mayoría de nosotros, no verificamos constantemente en el cielo la presencia de estos objetos. Entendemos las probabilidades y sabemos que "usted tendría que ser muy desafortunado" para que algo así le pasara. De igual manera, 40 millones de personas entran en una lotería. Una persona gana. ¡Qué suerte tiene! En Florida nieva una vez cada cinco años; pero si esto sucede el día de su boda. ¡Usted es muy desafortunado! ¿En términos de la teoría de la probabilidad qué significa decir que alguien tiene mucha suerte o es desafortunado? ¿Qué es la suerte?

☹ INSENSATEZ Y FALACIAS ESTADÍSTICAS ☹

La falacia del jugador: independencia de eventos de probabilidad

Imagine que Bob y Terri están jugando a lanzar una moneda al aire. Bob gana con cara, y Terri, con cruz. Ellos se turnan decidiendo cuánto valdrá el siguiente lanzamiento, escogiendo una cantidad de entre 5 y 25 centavos.

Bob sólo ganó tres veces seguidas a 10 centavos cada lanzamiento. ¿Debe aumentar Terri la apuesta a 25 centavos en el próximo lanzamiento? El hecho de que cayera cara tres veces seguidas ¿incrementa las probabilidades de que caiga cruz en el próximo lanzamiento?

La respuesta es no. Un error estadístico común al calcular probabilidades involucra la independencia de las partes de los eventos compuestos. Cada moneda se lanza de manera independiente de lo que pasó en un lanzamiento previo. Si lanzamos una moneda dos veces y obtenemos cara en ambas ocasiones, esto no incrementa la probabilidad de que en el tercer lanzamiento caiga cruz. La probabilidad sigue siendo .5000.

Esta tendencia a imaginar que eventos independientes están enlazados es un tipo de falacia del jugador. Cuando un jugador tiene una racha de mala suerte, quizás empiece a creer que le debe seguir una racha de buena suerte. De hecho, a la larga la buena o mala suerte se equilibran. ¿Pero qué es *a la larga*? ¿Son 3, 10 o 1 millón de lanzamientos? Para un apostador dado, ¿a la larga es mucho más tiempo de lo que durará su dinero? Es más, el equilibrio entre la buena y mala suerte ocurre entre todos los jugadores, no dentro de un solo jugador. Así, si 100 parejas estuvieran jugando el juego de lanzar la moneda en el transcurso de la tarde, hay gran oportunidad de ambos resultados (cara y cruz) aparezcan aproximadamente la misma cantidad de veces. Pero Bob y Terri pueden terminar obteniendo más caras; mientras Joe y Maggie, más cruces.

Asumir que los lanzamientos de monedas están enlazados es pensar equivocadamente que sabemos la longitud de una "serie", una sucesión de lanzamientos a la larga. Por desgracia, hay un número infinito de posibles sucesiones, porque cada lanzamiento es independiente del próximo. Por ejemplo, las tres caras seguidas de Bob podrían ser parte de cualquiera de las siguientes series, en las cuales las caras (C) y las cruces caen igual número de veces (se utiliza X para designar a las cruces):

X, X, C, C, C, X, C, C, X, X
X, X, X, X, C, X, C, C, C, C, C, X
C, X, C, X, X, C, X, X, X, C, C, X, C, C, C, X
C, C, C, C, X, X, C, C, X, X, X, C, X, X, C, X, C, X, X, C

Para un jugador asumir que sabe de algún modo la sucesión futura de los resultados consiste en suponer que el futuro puede verse a una magnitud mayor de lo que nos dicen las probabilidades básicas de ocurrencia. Ésta no es obviamente una manera sensata de jugar.

Fórmulas y reglas de probabilidad en el capítulo 6

Calculó de una probabilidad:

$$p\,[\text{de éxito}] = \frac{\#\,\text{éxitos}}{\#\,\text{intentos}} = \frac{\#\,\text{posibles resultados exitosos}}{\#\,\text{total de posibles resultados}}$$

Calculó de una puntuación Z:

$$Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X}$$

Calculó de una puntuación bruta (X) cuando se conoce Z_X

$$X = \bar{X} + (s_X)(Z_X)$$

Calculó del número de casos que corresponden a un área bajo la curva normal:

$$\# = p\,(n)$$

Reglas básicas de la teoría de la probabilidad

1. Regla de probabilidad 1: Las probabilidades siempre oscilan entre 0 y 1.
2. Regla de probabilidad 2: La regla de adición para eventos alternativos: la probabilidad de eventos alternativos es igual a la suma de las probabilidades de eventos individuales.
3. Regla de probabilidad 3: Realice el ajuste para las ocurrencias conjuntas, eventos que tienen un doble éxito o unen dos aspectos de éxito.
4. Regla de probabilidad 4: La regla multiplicativa para eventos compuestos: la probabilidad de un evento compuesto es igual al múltiplo de las probabilidades de las partes separadas del evento.
5. Regla de probabilidad 5: Aclare si hay remplazamiento en el caso de eventos compuestos.

Preguntas para el capítulo 6

1. ¿Qué es la teoría de la probabilidad?
2. Mencione tres acciones recientes en su vida cotidiana donde usó la teoría de la probabilidad (aunque no calculara probabilidades reales).
3. ¿Qué denota típicamente el denominador de una fórmula de probabilidad?
4. ¿Qué denota típicamente el numerador de una fórmula de probabilidad?
5. Si alguien reporta una probabilidad de 150 por ciento, ¿qué regla de probabilidad ha sido rota?
6. Señale dos eventos que tengan 100 por ciento de probabilidad de ocurrencia.
7. Mencione dos eventos que tengan 0 por ciento probabilidad de ocurrencia.
8. Describa la regla de adición de probabilidad y especifique cuándo se usa. Dé un ejemplo.

9. Describa la regla multiplicativa de probabilidad y especifique cuándo se usa. Dé un ejemplo.
10. Al calcular una probabilidad, un evento que tenga doble éxito o junte dos aspectos de éxito se llama ______________.
11. Para una proporción de casos que representan éxito, ¿qué distingue a una interpretación distributiva de una interpretación probabilística? Ilustre con un ejemplo.
12. ¿Con variables de qué niveles de medida se usan más apropiadamente la media, la desviación estándar y la curva normal?
13. ¿Por qué es apropiado utilizar el mismo símbolo p para la proporción, la probabilidad y el área bajo una curva normal?
14. Cuando una puntuación de una variable normalmente distribuida está a la derecha de la media, está en la dirección ______________.
15. Explique por qué es impropio usar las puntuaciones Z y la tabla de la curva normal para cualquier distribución de puntuaciones que no esté normalmente formada.
16. ¿Qué información proporciona un rango percentilar?
17. Explique lo que significa ser muy afortunado o muy desafortunado.

Ejercicios para el capítulo 6

1. Calcule las siguientes probabilidades para un dado de juego:

   a) p [6]
   b) p [2 o 4]
   c) p [2 luego 3 luego 4]

2. Calcule las siguientes probabilidades para un dado de juego:

   a) p [5]
   b) p [5 luego 6]
   c) p [1 o 3 o 6]

3. Suponga que usted tiene una caja con 100 canicas rojas, 50 azules y 50 verdes. Calcule las probabilidades de sacar al azar las siguientes de la caja:

   a) p [rojo luego rojo luego verde] sin reemplazamiento
   b) p [rojo luego rojo luego verde] con reemplazamiento
   c) p [azul luego rojo luego verde] sólo con reemplazamiento de las rojas

4. Suponga que tiene una caja de frijoles secos bien revueltos: 150 rojos, 70 blancos y 80 negros. Calcule las probabilidades de sacar al azar las siguientes de esta caja:

   a) p [blanco luego rojo luego negro] sin reemplazamiento
   b) p [rojo luego rojo luego negro] con reemplazamiento
   c) p [blanco luego negro luego blanco] sólo con reemplazamiento de los negros

5. Para el lanzamiento de una moneda (C = cara, X = cruz), calcule las siguientes:

   a) p [C]
   b) p. [X luego X]
   c) p. [X luego C luego X]

6. Para lanzar una moneda (C = cara, X = cruz), calcule las siguientes:

   a) p [X]
   b) p. [C luego X]
   c) p. [X luego X luego X]

7. Calcule las siguientes probabilidades al sacar cartas de un paquete estándar de 52 cartas.

   a) p [as]
   b) p [rey o sota]
   c) p [reina o espada]
   d) p [as luego as o rey luego rey] sin reemplazamiento

8. Calcule las siguientes probabilidades al sacar cartas de un paquete estándar de 52 cartas.

   a) p [10]
   b) p [7 o rey]
   c) p [sota o diamante]
   d) p [rey luego rey o as luego as] sin reemplazamiento

9. Con un paquete estándar de 52 cartas, ¿son mejores sus oportunidades de sacar dos ases seguidos con o sin "reemplazamiento?" Ilustre con cálculos.
10. Con un paquete estándar de 52 cartas, ¿son mejores sus oportunidades de sacar un as y luego un rey con o sin "reemplazamiento?" Ilustre con cálculos.
11. Frank está dirigiendo una encuesta telefónica de hogares residenciales en el condado Big Frog. Insensatamente, usa la guía telefónica como un cuadro de muestreo y escoge al azar números de teléfono de ésta. Así, resulta que el 5 por ciento de casas en el condado no tienen teléfono. Entre las casas *con teléfono*, 30 por ciento no tienen listados sus números. Es más, 15 por ciento de los números listados son para negocios aunque están en la Sección Blanca. ¿Qué porcentaje de las casas del condado Big Frog tiene alguna oportunidad de ser llamados por Frank?
12. Las Melodious Lamp Shades son el nuevo grupo de música popular y tienen programado presentarse en el auditorio local en 14 días. Por desgracia, los boletos del concierto se agotan antes de que usted consiga uno. Su única oportunidad de ir es ganar un boleto en un concurso de la radio local siendo el primero en llamar cuando se toque una canción de Lamp Shades, lo que ocurre seis veces al día. En cualquier momento, 20 000 personas están escuchando la estación y 25 por ciento de ellas intentan llamar. Si usted intenta llamar en cada oportunidad entre ahora y el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que gane un boleto?