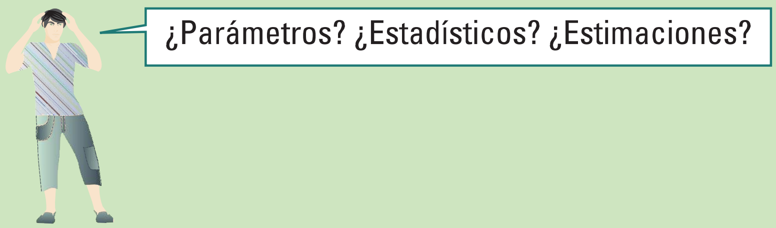
9. “Estadísticos” y “parámetros”

Cuando un estadístico se calcula en base a los datos de toda la población, ese resultado se denomina parámetro.



Aunque la definición parezca nueva, ya nos hemos encontrado con **parámetros** y sus **estimaciones.**

En el ejemplo de las elecciones para presidente del Club Grande de Fútbol (sección 4.2), la verdadera **proporción** de **todos los socios** que están a favor del primer candidato es un **parámetro** que indicamos con la letra p. Describe a la **población de 58.210 socios del club.** Lo llamamos p por proporción, pero no lo conocemos.

La proporción que se obtiene a partir de una muestra es un **estadístico,** lo llamamos $\hat{p}$ (se lee p sombrero).

La investigadora finalmente obtuvo las respuestas de 538 socios, con 274 a favor del primer candidato. La **estimación del parámetro** es:

$$\hat{p} = \frac{275}{538} = 0,51$$

El 51% de los socios de la muestra está a favor del primer candidato, lo sabemos porque la investigadora se los preguntó. No sabemos cuál es el porcentaje real de todos los socios que lo apoyan, pero **estimamos** que alrededor de un 51% lo hace.

Consideremos nuevamente la población de todos los socios de un club, pero esta vez observemos su **edad.** El promedio de sus edades es un **parámetro,** lo llamamos **media** de la **variable edad.** Pero si seleccionamos una **muestra** de socios y calculamos el promedio de sus edades obtenemos una **media muestral.** La **media muestral** (capítulo 18) es un estadístico, cuyo valor depende de la **muestra elegida;** se parecerá a la media poblacional (el parámetro) pero en general no será igual.

La media poblacional generalmente se indica por la letra griega mu, **μ.**

Parámetros y estadísticos: Cuando el conjunto de datos proviene de la población completa, el valor del estadístico es un **parámetro.** Un **parámetro** es un número que describe la **población,** pero en la práctica casi nunca sabremos cuál es ese número porque no podemos conocer perfectamente a toda la población.

Cuando el conjunto de datos proviene de una muestra, el número obtenido es el **estadístico** que se utiliza como **una estimación del parámetro.**

La diferencia entre el parámetro y el estadístico es el **error de estimación.**

9.1 Actividades y ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios

a) Indicar cuál es la unidad muestral, la variable, el estadístico, la población y, cuando corresponda, identificar el tamaño de la muestra.
b) Si el valor en negrita es un parámetro o el valor de un estadístico.

1. Un lote de arandelas tiene un diámetro promedio de **1,908** cm. Este valor se encuentra dentro de las especificaciones de aceptación del lote por parte del comprador. Un inspector selecciona 100 arandelas y obtiene un promedio de **1,915** cm de diámetro. Este valor se encuentra fuera de los especificados límites, por lo tanto el lote es rechazado erróneamente.

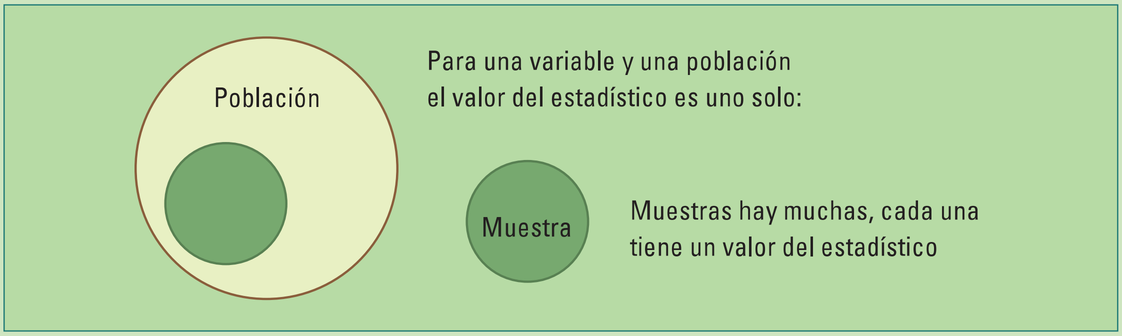
2. En un estudio reciente se entrevistaron 213 familias y la mayoría de las madres estaba al tanto de que los resfríos eran producidos por virus. Pero solamente el **40%** sabía que un antibiótico no puede curar un resfrío, y una de cada 5 creía, en forma equivocada, que un antibiótico lo podía prevenir.

3. En el año 2001 el **50%** de los hogares de la Argentina tenían heladera con freezer, de acuerdo con los valores censales del Anuario Estadístico de la República Argentina de 2006.

4. En el año 2009 el precio promedio de 8 autos modelo 2002 era de **$21.880.**

10. Variabilidad entre muestra y muestra

Siguiendo con el ejemplo del Club Grande de Fútbol, si la encuestadora obtuviera una segunda muestra aleatoria de 538 socios, la nueva muestra estaría compuesta por otros socios (alguno podría coincidir pero muchos serían diferentes). Es casi seguro que no habría exactamente 275 respuestas a favor del candidato 1 como ocurrió con la primera muestra. **Esto significa que el valor del $\hat{p}$ estadístico varía de muestra a muestra:** podría ocurrir que una muestra encuentre un 51% de socios a favor del candidato 1 mientras que una segunda sólo encuentre 37%.



La **primera ventaja** de las muestras aleatorias es que eliminan el **sesgo** del procedimiento de selección de una muestra. Aún así, suele no coincidir el resultado con el verdadero valor, debido a la **variabilidad** que resulta de la selección al azar. Este tipo de variabilidad es llamada **variabilidad muestral.**

Que la **variabilidad muestral** sea muy grande, significa que **el valor del estadístico cambia mucho entre muestra y muestra.** Por lo tanto no podemos creerle al resultado que obtenemos con una muestra en particular. Pero estamos salvados por una **segunda ventaja** que tienen las muestras aleatorias: la variación entre muestra y muestra (de un mismo tamaño) seguirá un patrón predecible. Este patrón predecible muestra que:

Los resultados de muestras de mayor tamaño son menos variables que los resultados de muestras más chicas.

10.1 Muchas muestras

Para ver cuánto le podemos creer al resultado de una muestra debemos preguntarnos ¿qué pasaría si tomásemos muchas muestras de la misma población?

Probemos y veamos en el ejemplo de las elecciones del Club Grande de Fútbol. Supongamos que en realidad (esto no lo sabemos) la mitad de los socios del club (29.105) está a favor y la mitad en contra. Es decir, **la verdadera proporción** (parámetro) de socios que está a favor de uno de los dos candidatos es $p = 0,5$

Exactamente el 50% de los socios está a favor del candidato 1.

¿Qué pasaría si utilizáramos una muestra de tamaño 35? Es un tamaño bastante chico para estimar el valor desconocido p de la verdadera proporción de socios a favor del candidato 1.

La figura 10.1 ilustra el resultado de elegir **1.000 muestras diferentes** de tamaño 35 y hallar el valor de $\hat{p}$ para cada una de ellas.

En la primera, de las 1000 muestras, sólo 12 de las 35 personas prefirieron al candidato 1 resultando la proporción $\hat{p} = \frac{12}{35}$

$= 0,34$

En la segunda muestra 20 de las 35 personas prefirieron al candidato 1, resultando una estimación de p: $\hat{p} = \frac{20}{35}$ implica que: $\hat{p} = 0,57$ para la segunda muestra.

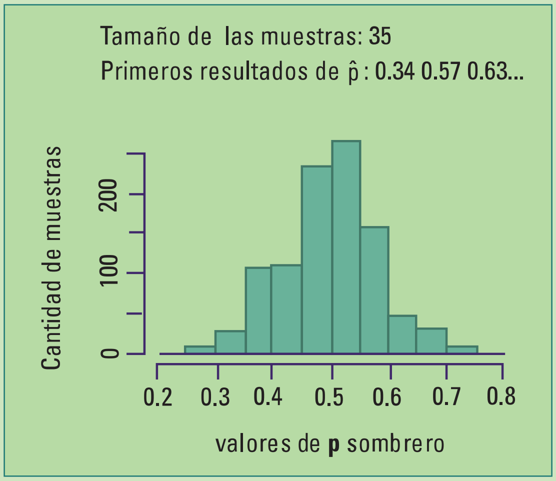


Figura 10.1.

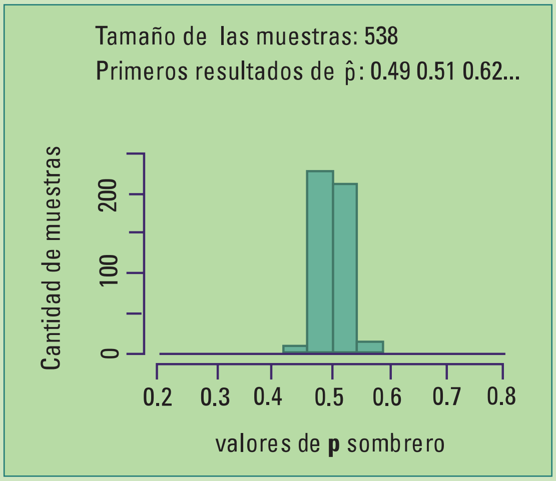


Figura 10.2.

En las figuras anteriores, en el eje horizontal se grafican los valores de las proporciones muestrales $\hat{p}$, las alturas de las barras muestran cuantas de las 1.000 muestras dieron valores dentro de cada uno de los grupos. Este tipo de gráfico se llama histograma (ver capítulo 16).

Vimos, en el capítulo 9, que la investigadora tomó una **única muestra** de 538 socios, y no sólo 35, obteniendo $\hat{p}$=0,51 ¿Qué pasa cuando tomamos muchas muestras de tamaño 538?

La figura 10.2 presenta los resultados de seleccionar **1.000 muestras** aleatorias simples **diferentes,** cada una de **tamaño 538** de una población para la cual la verdadera proporción es p=0,5. Las figuras 10.1 y 10.2 tienen los valores del eje horizontal en la misma escala, esto nos permite ver qué ocurre cuando el tamaño de las muestras se aumenta de 35 a 538: los valores están **más concentrados alrededor del valor verdadero 0,5** y, por lo tanto, **podemos confiar** más en un resultado que proviene de **una muestra de tamaño 538** que de una de tamaño 35.

En ambos casos, los valores de las proporciones muestrales $\hat{p}$ varían de muestra a muestra y están centrados en 0,5. Recordemos que **p=0,5** es el **valor verdadero** del **parámetro.** Algunas muestras tienen un $\hat{p}$ menor que 0,5 y otras mayor, sin que alguno de los dos sentidos esté favorecido. **El estimador de p ($\hat{p}$) no tiene sesgo;** esto ocurre tanto para muestras pequeñas como más grandes.

□ 10.2 Margen de error

Ya vimos que **los valores de $\hat{p}$** que provienen de las muestras de tamaño 35 **están más dispersos** que los de las muestras de tamaño 538 (figuras 10.1 y 10.2). Además, el 95% de las muestras de tamaño 538 dan estimaciones de p entre 0,4592 y 0,5408 o sea 0,0408 a cada lado del valor verdadero 0,5. Llamamos a 0,0408 **margen de error.**

Una **estimación de** p que resulte **de una muestra de tamaño 538** tendrá un **error de a lo sumo 0,0408** en el **95% de las muestras;** sólo el 5% tendrá un error mayor. Decimos que 0,0408 es **el margen de error de la estimación de p** con **un nivel de confianza del 95%.**

Como p=0,5 resulta un margen de error porcentual de 8,16%.

$$\text{Proporción de error: } \frac{0{,}0408}{0{,}5} = 0{,}0816$$

$$\text{Error porcentual: } \frac{100 \times 0{,}0408}{0{,}5} = 8{,}16$$

El margen de error del 8,16% significa que en el 95% de las veces que estimemos el parámetro p con un **tamaño de muestra 538 el error porcentual será menor a 8,16%.**

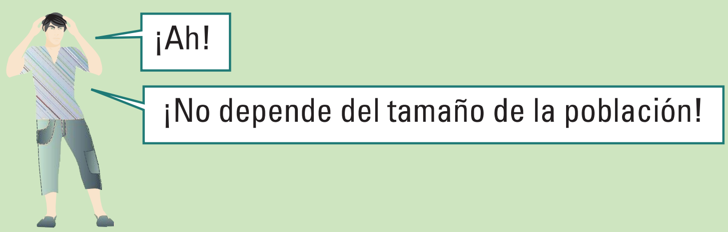
Para las **muestras de tamaño 35 el 95%** de los valores se encuentra entre 0,3429 y 0,6571 dando valores alejados del verdadero hasta una distancia de 0,1571 a cada lado. El **margen de error** porcentual, en este caso sería del **31,42 %.**

Hemos obtenido los márgenes de error tomando muchas muestras de una población a la que le conocíamos el valor verdadero del parámetro p. Este procedimiento es muy incómodo en situaciones reales.

Por suerte, los estadísticos han estudiado el problema de hallar el margen de error en general. Encontraron que cuando se utiliza una proporción muestral $\hat{p}$ calculada a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n para estimar una proporción poblacional p desconocida, con una confianza del 95%, **el margen de error** en un **muestreo aleatorio simple** será aproximadamente de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Al aumentar el tamaño de la muestra se reduce el margen de error.

Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, **MEJOR.**

El margen de error no depende del tamaño de la población, únicamente depende del tamaño de la muestra. Esto es cierto cuando la muestra es sólo una pequeña parte de la población, tal como ocurre en la mayoría de las encuestas. Una muestra aleatoria de tamaño 500 de una población de tamaño 100.000 es tan representativa como una muestra aleatoria de tamaño 500 de una población de tamaño 1.000.000.



Supongamos que se conversa con 20 alumnos/as de una escuela sobre la posibilidad de reducir las vacaciones de verano, agregando dos períodos de vacaciones uno en otoño y otro en primavera. Si a la mitad le pareció una buena idea, ¿estimaría que exactamente la misma proporción de todos los alumnos/as de la escuela está de acuerdo, suponiendo que la muestra es representativa de la opinión de todos?

Si el 50% de la muestra responde sí con una muestra de tamaño:	**El porcentaje de la población respondiendo sí podrá ser:**	
	Tan bajo como	Tan alto como
10	24%	76%
15	28%	72%
20	**31%**	**69%**
30	34%	66%
50	37%	63%
100	41%	59%
250	44%	56%
1.000	47%	36%

Con una muestra de tamaño 10, si 5 contestaron sí, podría ocurrir que el porcentaje verdadero de alumnos que quieren reducir las vacaciones de verano para agregar dos vacaciones cortas en otoño y primavera sea tan baja como el 25% o tan alta como el 76%. Esta afirmación es correcta 95 de cada 100 veces. En toda la escuela el porcentaje de alumnos que quieren reducir las vacaciones de verano para agregar dos vacaciones cortas en otoño y primavera se encuentra entre el 24% y el 76%. Es un rango de valores muy amplio para el posible apoyo o no apoyo de la propuesta. Sería conveniente ampliar la muestra para tener un resultado más preciso.

¿Qué significa **"una confianza del 95%"**?

Significa que ese margen de error será válido el 95% de las veces que se calcule el estimador, **confiamos** que nos toque uno de los resultados buenos porque están en una relación de 95 a 5 con los resultados malos.

¿Qué significa **"margen de error"**?

El **margen de error** mide la diferencia máxima que se espera tener entre un resultado obtenido a partir de una muestra y su valor poblacional verdadero, el 95% de las veces.

□ 10.3 Error debido al muestreo aleatorio

Por más que una encuesta esté bien diseñada y bien conducida, dará el valor de un **estadístico** como estimación del **parámetro** poblacional. **Muestras diferentes darán valores diferentes** y el error debido al muestreo estará siempre presente. Pero podremos decir, con cierto grado de confianza, cuál va a ser la magnitud de ese error (denominado margen de error en la sección anterior). Se trata de **errores aleatorios,** surgen de utilizar una muestra en vez de la población total.

□ 10.4 Errores que no son debidos al muestreo aleatorio

Podemos llamar **equivocaciones** a algunos de estos errores. Pueden ocurrir en cualquier encuesta e incluso en los censos. Estas equivocaciones son posibles en todos los pasos, desde el registro del dato hasta obtención final del valor del estadístico. Actualmente, con el uso de procedimientos computarizados para muchos de los cálculos, se han reducido los errores de cálculo.

Otro tipo de errores son los debido a la presencia de sesgos en el muestreo, en las respuestas y/o en su registro (sección 6.3). Por ejemplo, pueden ocurrir cuando un **encuestado miente.** Lo llamamos sesgo de respuesta. Un respondente puede mentir respecto de su edad, de cuántas horas trabaja por día (puede pensar que trabaja poco y entonces las aumenta), de su salario (puede no querer que se sepa que gana mucho, o que gana poco) o puede haber olvidado cuantos paquetes de cigarrillos fumó la semana anterior.

Lo que no mide el margen de error: **No mide** el error que se comete debido al **sesgo** en el muestreo, ni el generado por las respuestas incorrectas y su registro. Estos pueden ser muy grandes, en comparación con el llamado margen de error y **no se reducen** al aumentar el tamaño de la muestra.

Podemos utilizar la analogía del juego del tiro al blanco para describir el efecto del sesgo y el tamaño de muestra en el error de muestreo. Supongamos que el centro del blanco (punto rojo de la figura 10.3) es el parámetro poblacional al que queremos acertar. Si estamos realizando un muestreo aleatorio, en cada muestra -es decir para cada tiro- obtendremos un punto cercano al centro. Algunas veces, el dardo caerá un poco arriba otras un poco abajo. Si en cambio el procedimiento tiene sesgo, los valores estarán todos desviados en una misma dirección. El esquema de la figura 10.3 muestra en la parte inferior puntos negros más concentrados que los de la parte superior, están representando un aumento en el tamaño de las muestras y una reducción de la variabilidad de los resultados. Sin embargo, el error la distancia de los puntos negros al rojo no se reduce al reducirse la variabilidad cuando hay sesgo (parte derecha del esquema).

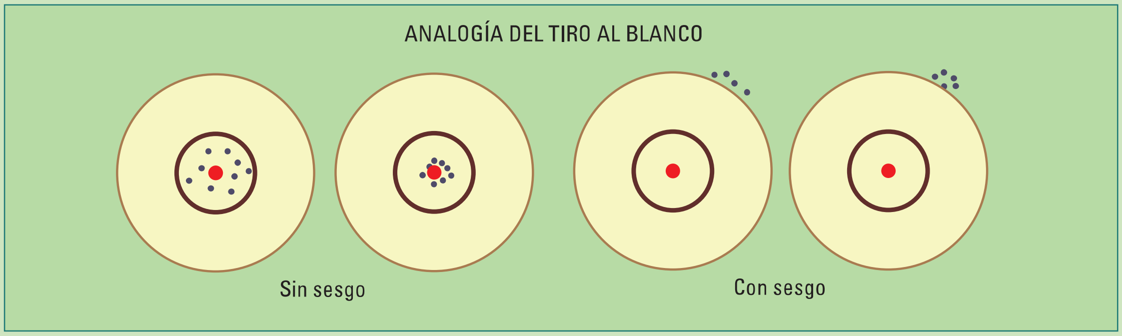


Figura 10.3. *Los puntos del panel inferior están más concentrados, los de la izquierda (representando un muestreo sin sesgo) están más cerca del punto rojo que los de la derecha.*

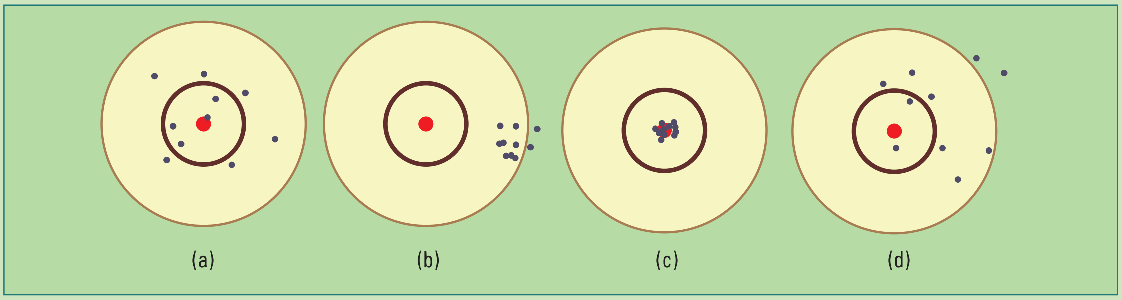
10.5 Actividades y ejercicios

1. Suponiendo que la verdadera proporción de socios a favor del candidato 1 del Club Grande de Fútbol fuera p=0,5.

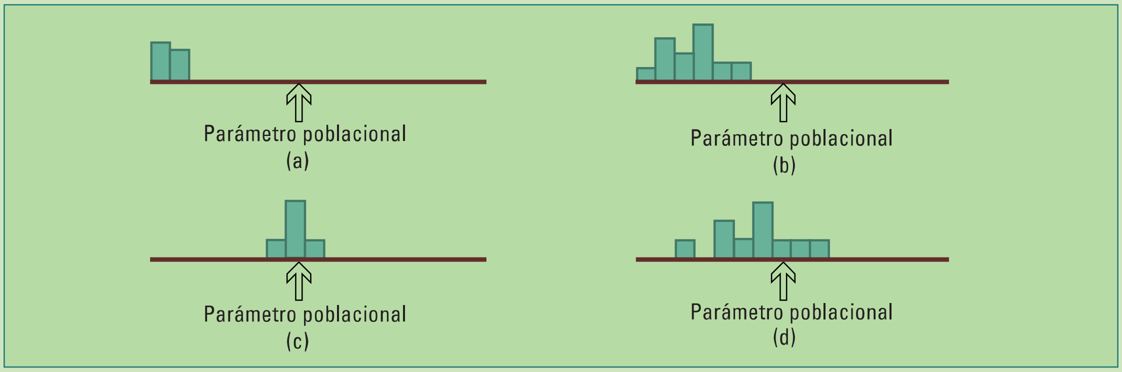
   a) Si el tamaño de la muestra fuera 538,
   b) Si el tamaño de la muestra fuera 35,

   ¿Le sorprendería obtener 51% de socios a favor del candidato 1, y 37%? Para responder utilice los histogramas de 1.000 valores de $\hat{p}$ (figuras 10.1 y 10.2).

2. Siguiendo con la analogía del tiro al blanco de la sección 10.4, indique en cuál de las figuras siguientes los tiros son: I) precisos y sin sesgo, II) precisos y con sesgo, III) imprecisos y sin sesgo, IV) imprecisos y con sesgo.



3. La siguiente figura contiene gráficos semejantes a los de las figuras 10.1 y 10.2 para muchas repeticiones de distintos tipos de muestreos. Las alturas de las barras representan la frecuencia con la que apareció el valor del estadístico. El valor verdadero del parámetro está indicado. Agregue en cada gráfico a qué tipo de muestreo corresponde: I) preciso y sin sesgo, II) preciso y con sesgo, III) impreciso y sin sesgo, IV) impreciso y con sesgo.



4. Se eligen 3 alumnos para representar a su división en el centro de estudiantes. Si su división estuviera compuesta por 15 mujeres y 20 varones, y los representantes seleccionados fueran todos varones ¿Habría que sospechar de discriminación en contra de las mujeres?

   Veamos el comportamiento de la variabilidad muestral al elegir muestras pequeñas de una población pequeña (su división). Escriba los nombres de cada uno de los alumnos/as en papelitos del mismo tamaño y la misma forma. Coloque todos en una bolsa. Luego de mezclarlos, retire de la misma tres papelitos con los nombres de los alumnos seleccionados. Registre la cantidad de mujeres seleccionadas y devuelva los papelitos a la bolsa. Repita 25 veces. Construya un histograma como el de la figura 10.1 para la cantidad de mujeres seleccionadas en las 25 repeticiones. ¿Cuál es la cantidad promedio de mujeres en las 25 muestras?

5. Una encuesta nacional realizada a 437 varones y 1.125 mujeres obtuvo que al 64% de los varones les gustaría ver fútbol femenino por televisión, mientras que ese porcentaje se redujo a 42% entre las mujeres.

   a) Los encuestadores publicaron que el margen de error para una confianza del 95% es aproximadamente del 5% para los varones y 3 % para las mujeres. Explique a qué se debe esta diferencia.

   b) ¿Por qué es necesario incluir el margen de error al dar el resultado de una encuesta?